

An aerial satellite-style photograph of a tropical cyclone. The storm is characterized by a dense, white, circular cloud structure with a well-defined eye in the center. The surrounding clouds are thick and spiral outwards, creating a distinct pattern over the dark blue ocean. The overall scene is captured from a high angle, showing the full extent of the storm's cloud cover.

# **Rudimentos de Meteorologia Dinâmica**

***Prakki Satyamurty***

## Prefácio

De todas as disciplinas de um curso de meteorologia, a meteorologia dinâmica é uma das mais fundamentais, pois toda a teoria e todos os modelos matemáticos para estudar os sistemas de tempo e clima se baseiam nela. As notas de aula que apresento neste CD deverão ajudar os alunos de graduação e pós-graduação em meteorologia a aprender a essência do estado da atmosfera terrestre e dos seus movimentos.

As notas são baseadas nos livros de Holton (An Introduction to Dynamic Meteorology, Third Edition, Academic Press, San Diego), em grande parte, e um pouco nos livros do Bluestein (Synoptic-Dynamic Meteorology in Midlatitudes, vols. I e II, Oxford University Press, Oxford). São apresentados nelas os princípios básicos da dinâmica da atmosfera que foram estabelecidos ao longo do tempo pelas escolas européias (da Inglaterra e de Bergen) e dos Estados Unidos e por Rossby, Patterssen, Haltiner, Bjerknes, e vários outros. As minhas contribuições para a apostila, além da língua portuguesa, são: (1) as figuras e ilustrações são devidamente modificadas para representar situações do Hemisfério Sul; (2) soluções para alguns problemas do livro de Holton são incluídas (isso é para facilitar o aluno a aprender uma abordagem na solução dos problemas); (3) inclui um glossário dos termos e conceitos que ajudariam o meteorologista ter noções precisas; (4) inclui várias perguntas e respostas rápidas sobre toda a matéria visando sanar dúvidas a respeito das questões que os alunos normalmente enfrentam nas entrevistas ou exames de qualificação. Espero que os itens 2 e 4 ajudam o aluno no desenvolvimento de raciocínio. Todavia, gostaria de advertir os alunos e professores que pretendem usar as minhas notas de aula para tentarem resolver ou responder as questões antes de procurar a solução oferecida por mim.

Devo agora agradecer primeiramente ao Dr. Carlos A. Nobre, por ter me encorajado para preparar este CD. Meu aluno, Gilberto Bonatti, inicialmente auxiliou-me na preparação deste CD. A participação do Sr. Gilberto foi apoiado parcialmente pela Sociedade Brasileira de Meteorologia. Devo reconhecer o excelente trabalho dos analistas, especialistas na editoração de textos e preparação dos gráficos, Sr. Fábio Loyola, Sra. Letícia M. B. Faria, Sr. Carlos César de Oliveira e Srta. Patricia M. Simões. Agradeço a todos os meus alunos da disciplina Meteorologia Dinâmica que levantaram a sua mão e me solicitaram melhores explicações da matéria e/ou apontaram os meus erros durante as minhas aulas.

Quero deixar uma dica para os professores: um professor estaria apenas cumprindo o seu dever se ele ministrar as aulas com prazer, desenvolver boa didática, se preparar antes do começo da aula e organizar a sua agenda para não haver descontinuidades durante o transcorrer do curso. Apreciaria receber “feed back” dos usuários deste CD para que eu possa melhorar a apostila e sua apresentação nas versões ou edições futuras.

Prakki Satyamurty  
São José dos Campos, 10 de agosto de 2004.

## Sumário

### **Capítulo 1**

<a href="#">1.1 - Introdução</a>	01
<a href="#">1.2 - Análise de escala</a>	01
<a href="#">1.3 - Forças fundamentais</a>	03
<a href="#">1.3.1 - Segunda lei de Newton</a>	03
<a href="#">1.3.2 - Força de gradiente de pressão</a>	03
<a href="#">1.3.3 - Força gravitacional</a>	05
<a href="#">1.3.4 - Força de viscosidade</a>	05
<a href="#">1.3.5 - Sistemas de coordenadas não inerciais</a>	06
<a href="#">1.3.6 - Força centrífuga</a>	06
<a href="#">1.3.7 - Força da gravidade</a>	07
<a href="#">1.3.8 - Força de Coriolis</a>	08
<a href="#">1.4 - Estrutura da atmosfera estática</a>	10
<a href="#">1.4.1 - Pressão como coordenada vertical</a>	11

### **Capítulo 2**

<a href="#">2.1 - Derivada total</a>	13
<a href="#">2.1.1 - Derivada total de um vetor em um sistema de coordenadas em rotação</a>	14
<a href="#">2.2 - Forma vetorial da equação de movimento</a>	15
<a href="#">2.2.1 - Equações componentes em coordenadas esféricas (coordenadas: <math>\lambda, \phi, z</math>)</a>	17
<a href="#">2.3 - Análise de escala das equações de movimento</a>	21
<a href="#">2.3.1 - Aproximação geostrófica e o vento geostrófico</a>	22
<a href="#">2.3.2 - Equações prognósticas aproximadas: O número de Rossby</a>	23
<a href="#">2.3.3 - Aproximação hidrostática</a>	23
<a href="#">2.4 - Equação de continuidade</a>	25
<a href="#">2.4.1 - Análise de escala da equação de continuidade</a>	26
<a href="#">2.5 - Equação termodinâmica</a>	27
<a href="#">2.5.1 - Temperatura potencial</a>	29
<a href="#">2.5.2 - Decréscimo adiabático de temperatura (com altura), e a estabilidade estática</a>	29
<a href="#">2.5.3 - Análise de escala da equação termodinâmica</a>	31

### **Capítulo 3**

<a href="#">3.1 - Equações básicas em coordenadas isobáricas</a>	32
<a href="#">3.2 - Escoamentos (balanceados) em equilíbrio</a>	33
<a href="#">3.2.1 - Movimento ou (escoamento) geostrófico</a>	35
<a href="#">3.2.2 - Escoamento inercial</a>	36
<a href="#">3.2.3 - Movimento ou (escoamento) ciclostrófico</a>	36
<a href="#">3.2.4 - Vento gradiente</a>	37
<a href="#">3.3 - Trajetória e linha de corrente</a>	39
<a href="#">3.4 - Vento térmico</a>	40
<a href="#">3.4.1 - Advecção térmica</a>	41

<u>3.4.2 - Atmosfera barotrópica</u>	42
<u>3.5 - Movimento vertical</u>	43
<u>3.6 - Tendência de pressão em superfície</u>	43
<u>3.7 - Circulações verticais devido ao aquecimento</u>	45
<b><u>Capítulo 4</u></b>	
<u>4.1 - Circulação e vorticidade</u>	46
<u>4.2 - Teorema de circulação</u>	47
<u>4.2.1 - Fluido barotrópico</u>	47
<u>4.3 - Circulação relativa a Terra</u>	48
<u>4.3.1 - Fluido barotrópico</u>	48
<u>4.3.2 - Fluido baroclínico</u>	49
<u>4.4 - Vorticidade</u>	50
<u>4.4.1 - Vorticidade em coordenadas naturais</u>	52
<u>4.5 - Vorticidade potencial</u>	54
<u>4.5.1 - Escoamento sobre cordilheiras</u>	55
<u>4.6 - Equação da vorticidade</u>	57
<u>4.6.1 - Equação da vorticidade em coordenadas isobáricas</u>	58
<u>4.6.2 - Análise de escala de equação de vorticidade</u>	58
<u>4.6.3 - Equação de vorticidade potencial barotrópica</u>	60
<b><u>Capítulo 5</u></b>	
<u>5.1 - Camada limite planetária</u>	62
<u>5.2 - Aproximação Boussinesq</u>	62
<u>5.3 - Média de Reynold</u>	63
<u>5.4 - Escoamento balanceado</u>	64
<u>5.5 - Camada limite de mistura</u>	65
<u>5.6 - Teoria K</u>	66
<u>5.7 - Camada de Ekman</u>	67
<u>5.8 - Transporte de massa na camada de Ekman</u>	69
<u>5.9 - “Spindown” ou decaimento</u>	70
<b><u>Capítulo 6</u></b>	
<u>6.1 - Movimentos de escala sinótica</u>	72
<u>6.2 - Estrutura observada das circulações extratropicais</u>	72
<u>6.3 - Aproximação quasigeostrófica</u>	75
<u>6.4 - Equação de vorticidade quasigeostrófica</u>	77
<u>6.5 - Efeitos da advecção de vorticidade</u>	78
<u>6.6 - Equação de tendência geopotencial</u>	79
<u>6.7 - Equação de vorticidade potencial quasigeostrófica</u>	81
<u>6.8 - Diagnóstico do movimento vertical</u>	83
<u>6.9 - Equação Omega em termos de vetor Q</u>	85
<u>6.10 - Situações sinóticas e vetor Q</u>	86
<b><u>Capítulo 7</u></b>	
<u>7.1 - Oscilações atmosféricas: Perturbações lineares</u>	88
<u>7.2 - Movimentos ondulatórios e oscilatórios</u>	88

<a href="#">7.3 - Série de Fourier</a>	90
<a href="#">7.4 - Dispersão e velocidade de grupo</a>	91
<a href="#">7.5 - Onda plana e nomenclatura</a>	93
<a href="#">7.6 - Ondas sonoras ou acústicas</a>	94
<a href="#">7.7 - Ondas de gravidade de água rasa</a>	96
<a href="#">7.8 - Ondas de Rossby</a>	99
<a href="#">7.8.1 - Onda de Rossby barotrópica livre</a>	99
<a href="#">7.9 - Ondas de gravidade internas</a>	101
<b><u>Capítulo 8</u></b>	
<a href="#">8.1 - Frentes</a>	104
<a href="#">8.2 - Frente como uma descontinuidade da zero ordem</a>	104
<a href="#">8.3 - Frontogênese</a>	107
<a href="#">8.4 - Função frontogenética do Pettersen</a>	109

## Lista de Figuras

1.1 - Elemento de volume para avaliar a força do gradiente de pressão	03
1.2 - Força centrífuga. O eixo de rotação está perpendicular a página	06
1.3 - Superfície terrestre não esférica e a gravidade em relação a uma esfera idealizada	07
1.4 - Força de Coriolis devido a rotação da Terra	08
1.5 - Coluna atmosférica. $p_1$ e $p_2$ são pressões atmosféricas nos níveis $z_1$ e $z_2$ , respectivamente	10
1.6 - Esquemática para transformar e força de gradiente de pressão em coordenadas isobáricas	12
2.1 - Trajetória de uma parcela do ar	13
2.2 - Seção meridional da Terra	16
2.3 - Dependência longitudinal do vetor unitário $\mathbf{i}$	18
2.4 - Decomposição de $\delta\mathbf{i}$ nos componentes vertical e na direção norte	18
2.5 - Dependência do vetor unitário $\mathbf{j}$ sobre a longitude	19
2.6 - Dependência do vetor unitário $\mathbf{j}$ sobre a latitude	19
2.7 - Vento geostrófico em relação as isóbaras	22
2.8 - Elemento de volume na forma de paralelepípedo com lados $\delta x$ , $\delta y$ , $\delta z$	25
2.9 - Estabilidade estática. Perfil de temperatura (a) e perfil de temperatura potencial (b). Variação vertical $\Gamma_1$ instável. $\Gamma_2$ estável. $\Gamma_d$ é decaimento de temperatura adiabática	30
3.1 - Variação do versor tangencial ao movimento seguindo o próprio movimento	34
3.2 - Vento geostrófico e o equilíbrio de forças	35
3.3 - Movimento ciclostrófico em torno do centro de baixa pressão e equilíbrio de forças	36
3.4 - Vento gradiente e equilíbrio de forças	38
3.5 - Trajetórias e linhas de correntes em torno de um centro de baixa pressão. $t_1$ , $t_2$ , $t_3$ são três instantes do tempo	39
3.6 - Variação do vento geostrófico com altura ou vento térmico	40
3.7 - Vento térmico e sua relação com a advecção térmica	42
3.8 - Relação entre a divergência média da coluna atmosférica e a tendência de pressão na superfície	44
4.1 - Circuito anti-horário fechado. $s$ é a distância ao longo do circuito. $\mathbf{U}$ é vetor velocidade. $d\mathbf{l}$ é versor tangencial ao circuito no ponto $s$	46
4.2 - Efeito da variação de latitude e área do circuito sobre a circulação	49
4.3 - Efeito solenoidal para a geração de brisa marítima ou terrestre	50
4.4 - Um circuito anti-horário retangular	52
4.5 - Avaliação da vorticidade em coordenadas naturais	53
4.6 - Conservação de vorticidade potencial para movimentos adiabáticos	55
4.7 - Escoamento zonal sobre uma cordilheira gera ondas do lado sotavento	56
5.1 - Esquemática da camada de mistura. As setas verticais representam os fluxos de momentum e de calor	65
5.2 - Balanço de forças em um escoamento permanente na camada de mistura	66
5.3 - Espiral de Ekman para Hemisfério Sul	68
5.4 - Circulação anticiclônica com divergência e circulação ciclônica com convergência, na presença de atrito	69
5.5 - Esquemática do bombeamento de Ekman. $D_e$ é a profundidade da camada	69

limite de Ekman	70
<b>6.1</b> - Estágios de desenvolvimento de um sistema baroclínico de latitudes médias no Hemisfério Sul. (a) onda incipiente, (b) em desenvolvimento e (c) madura. Linhas finas cheias são isóbaras na superfície. Linhas quebradas são isotermas. Linhas grossas são linhas de corrente em 500 hPa	74
<b>6.2</b> - Ondas sinóticas das latitudes médias compostas de cavados e cristas inclinados para oeste na vertical	75
<b>6.3</b> - Onda sinótica na média troposfera no plano horizontal, mostrando regiões ciclônicas ( $\zeta < 0$ ) e anticiclônicas ( $\zeta > 0$ ) e regiões de advecção ciclônica e advecção anticiclônica	78
<b>6.4</b> - Efeito dos esticamentos na conservação da vorticidade potencial	83
<b>6.5</b> - Onda sinótica de latitudes médias do Hemisfério Sul em desenvolvimento	84
<b>6.6</b> - Centros de pressão alinhados zonalmente e vetores <b>Q</b> associados	86
<b>6.7</b> - Esquemática da saída do jato no Hemisfério Sul e os vetores <b>Q</b> associados	87
<b>7.1</b> - Pêndulo simples	89
<b>7.2</b> - Onda plana	90
<b>7.3</b> - Grupo de ondas formadas pelos componentes senoidais	92
<b>7.4</b> - Propagação do grupo de ondas	92
<b>7.5</b> - Esquemática da propagação de onda de som. H e L são regiões de alta pressão e baixa pressão, respectivamente	94
<b>7.6</b> - Propagação das ondas de gravidade na superfície. H e L são regiões de alta pressão e baixa pressão, respectivamente	97
<b>7.7</b> - Um sistema de fluidos com duas camadas	97
<b>7.8</b> - Estrutura da onda de gravidade interna. Warm: quente, Cold: frio, High: alta pressão (ou crista), Low: baixa pressão (cavado). Vento é representado pelas setas	103
<b>8.1</b> - Descontinuidade da primeira ordem nos campos de A: temperatura, B: temperatura potencial	105
<b>8.2</b> - Descontinuidade no campo de pressão. A: alta pressão, B: baixa pressão	106
<b>8.3</b> - Inclinação da superfície frontal na vertical. PA: Porto Alegre, CT: Curitiba, SP: São Paulo, BH: Belo Horizonte	107
<b>8.4</b> - Processos cinemáticos que compactam ou afastam as isotermas. Coluna esquerda mostra isotermas antes do compactamento. Coluna direita mostra depois	109
<b>8.5</b> - Ação de campo de deformação sobre campo térmico para produzir frontogênese ou frontólise	111

**Lista de Tabelas**

<b>1.1</b> - Unidades derivadas de freqüente uso na meteorologia	01
<b>1.2</b> - Algumas escalas horizontais: comparação	02
<b>2.1</b> - Ordens de magnitude dos termos das equações de movimento horizontal	21
<b>2.2</b> - Ordens de magnitude dos termos da equação de movimento vertical	23



## Lista de Símbolos

- $a$ : raio de Terra ( $m$ ), sufixo para indicar grandezas no sistema de referência absoluto  
**A**: magnitude do vetor **A**  
**A**: um vetor  
 $A_x, A_y, A_z$ : componentes do vetor **A** nas direções  $x, y, z$   
 $c$ : velocidade de fase ( $m\ s^{-1}$ )  
 $c_x, c_y$ : velocidades de fase nas direções  $x$  e  $y$  ( $m\ s^{-1}$ )  
 $C_d$ : coeficiente de arrasto  
 $C_p, C_v$ : calores específicos a pressão constante e volume constante ( $J\ K^{-1}\ kg^{-1}$ )  
 $c_g$ : velocidade de grupo ( $m\ s^{-1}$ )  
 $c_{gx}, c_{gy}, c_{gz}$ : componentes de velocidade de grupo nas direções  $x, y, z$  ( $m\ s^{-1}$ )  
 $D$ : deformação ( $s^{-1}$ ) do escoamento bidimensional  
 $D1, D2$ : componentes da deformação ( $s^{-1}$ )  
 $D_e$ : altura da camada de Ekman ( $m$ )  
 $dl$ : segmento direcionado de um circuito ( $m$ )  
 $d/dt$ : derivada total com advecção bidimensional ( $s^{-1}$ )  
 $D/Dt$ : derivada total com advecção tridimensional ( $s^{-1}$ )  
 $e$ : base Napieriana de logaritmo  
 $e$ : como sufixo indica grandeza relativa a Terra  
 $f$ : parâmetro de Coriolis ( $s^{-1}$ )  
 $f_0$ : parâmetro de Coriolis considerado constante ou valor referencial ( $s^{-1}$ )  
 $F_{rx}, F_{ry}, F_{rz}$ : componentes da força de atrito  
**F**: força ( $N$ )  
 $F_r$ : força de atrito ou viscosidade  
 $g$ : aceleração de gravidade ( $m\ s^{-2}$ )  
 $\mathbf{g}$ : vetor de aceleração de gravidade  
 $G$ : constante universal de gravidade ( $kg\ m^3\ s^{-2}$ )  
 $gr$ : sufixo usado para designar vento gradiente  
 $h$ : altura ( $m$ )  
 $H$ : altura de escala, altura da superfície livre do estado básico ( $m$ )  
 $i$ : índice  
 $i: \sqrt{-1}$   
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ : versores nas direções  $x, y, z$   
 $j$ : índice  
 $J$ : taxa de calor ou aquecimento ( $J\ s^{-1}\ kg^{-1}$ )  
 $k, l, m$ : números de onda, nas direções  $x, y, z$  ( $m^{-1}$ )  
 $K$ : grau Kelvin ( $K$ )  
 $K$ : coeficiente de viscosidade turbulenta ( $m^2\ s^{-1}$ )  
 $K_m$ : coeficiente de viscosidade turbulenta para momentum ( $m^2\ s^{-1}$ )  
 $K_h$ : coeficiente de viscosidade turbulenta para calor ( $m^2\ s^{-1}$ )  
 $\mathbf{K}$ : vetor número de onda,  $\mathbf{ik}+\mathbf{j}l+\mathbf{k}m$  ( $m^{-1}$ )  
 $\mathbf{I}$ : vetor de posição estendendo-se da origem ao ponto  $x, y, z$   
 $L$ : escala horizontal dos sistemas de tempo ( $m$ )  
 $L_x, L_y, L_z$ : comprimento de onda na direção  $x, y, z$  ( $m$ )  
 $m$ : índice, massa de partícula, número de onda na direção  $z$ , metros  
 $M$ : massa da Terra, massa de parcela ( $kg$ )

$n$ : índice

$N$ : frequência Brunt-Vaisala ( $s^{-1}$ )

$p$ : pressão (Pa, hPa, mb)

$p_0$ : pressão referencial (Pa, hPa, mb), normalmente 1000 hPa

$q$ : vorticidade potencial ( $^{\circ}K Pa^{-1} m s^{-3}$ )

$q$ : umidade específica (kg/kg)

$Q$ : calor (J)

$\mathbf{Q}$ : vetor-Q de Hoskins ( $m s^{-3} Pa^{-1}$ )

$r$ : distância vertical com referência a centro de Terra (m)

$R$ : distância vertical com referência ao eixo da Terra (m)

$R$ : constante de gás ( $J K^{-1} kg^{-1}$ )

$R_d$ : constante de gás do ar seco ( $J K^{-1} kg^{-1}$ )

$s$ : entropia ( $J K^{-1}$ ), distância ao longo de uma trajetória (m)

$s, n$ : sistema de coordenadas naturais (em duas dimensões)

$S_p$ : parâmetro de estabilidade estática ( $K Pa^{-1}$ )

$t$ : tempo (s)

$T$ : temperatura (K)

$u, v, w$ : componentes do vento nas direções  $x, y, z$  ( $m s^{-1}$ )

$U$ : magnitude de movimento em três dimensões ( $m s^{-1}$ ), escala de vento

$U$ : escoamento básico ( $m s^{-1}$ )

$\mathbf{U}$ : vetor de movimento em três dimensões ( $m s^{-1}$ )

$v$ : componente meridional de vento ( $m s^{-1}$ )

$V$ : magnitude de vento ( $m s^{-1}$ )

$\mathbf{V}$ : vento ou movimento bidimensional ( $m s^{-1}$ )

$\mathbf{V}_g$ : vento geostrófico ( $m s^{-1}$ )

$\mathbf{V}_{ag}$ : vento ageostrófico ( $m s^{-1}$ )

$\mathbf{V}_{gr}$ : vento gradiente ( $m s^{-1}$ )

$w$ : movimento vertical ( $m s^{-1}$ )

$W$ : escala de movimento vertical ( $Pa s^{-1}$  ou  $m s^{-1}$ )

$x, y, z$ : coordenadas cartesianas (m)

$Z_T$ : espessura entre duas superfícies isobáricas (m)

$\alpha$ : volume específico ( $m^3 kg^{-1}$ )

$\beta$ : parâmetro de Rossby ( $m^{-1} s^{-1}$ )

$\chi$ : tendência geopotencial ( $m^2 s^{-3}$ )

$\Gamma$ : taxa de decaimento de temperatura com altura ( $K m^{-1}$ )

$\Gamma_d$ : taxa adiabática de decaimento de temperatura com altura ( $K m^{-1}$ )

$\delta$ : divergência ( $s^{-1}$ )

$\delta x, \delta y, \delta z, \delta t, \delta T$ : incrementos infinitesimais

$\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t$ : derivadas parciais

$\phi$ : latitude (rad)

$\Phi$ : geopotencial ( $m^2 s^{-2}$ )

$\eta$ : vorticidade absoluta ( $s^{-1}$ )

$\lambda$ : longitude (rad)

$\nu$ : frequência ( $s^{-1}$ )

$\theta$ : temperatura potencial (K)

$\rho$ : densidade ( $kg m^{-3}$ )

$\rho_0$ : valor ou perfil vertical referencial de densidade

$\sigma$ : estabilidade estática ( $m^2 \text{ Pa}^{-2} \text{ s}^{-2}$ )

$\omega$ : velocidade vertical nas coordenadas isobáricas ( $\text{Pa s}^{-1}$ )

$\zeta$ : vorticidade relativa ( $\text{s}^{-1}$ )

$\Omega$ : velocidade angular da Terra ( $\text{rad s}^{-1}$ )

$\Omega$ : vetor de rotação da Terra

$\nabla$ : operador nabla ( $m^{-1}$ )

$\nabla^2$ : Laplaciano ( $m^{-2}$ )

$'$ : indica desvio a partir do estado básico ou do valor referencial

$()$ : indica estado básico, média do Reynold

# Capítulo 1

## 1.1. Introdução

Meteorologia Dinâmica estuda os movimentos atmosféricos associados com tempo e clima. A dinâmica e termodinâmica do fluido atmosfera, mais especificamente a atmosfera terrestre, contida nos primeiros 20 a 25 km acima da superfície, são consideradas nesta disciplina. A atmosfera é tratada como meio contínuo, isto é, a estrutura molecular não é considerada. Uma partícula da atmosfera é uma parcela do ar muito pequena e, embora contém um grande número de moléculas, teoricamente ocupa somente um ponto no espaço.

Estado da atmosfera é caracterizado pelas grandezas físicas pressão, densidade e temperatura que são funções das coordenadas espaciais e do tempo. Essas variáveis de campo e suas derivadas são consideradas contínuas. As leis da física aplicadas à atmosfera assumem a forma de equações diferenciais parciais. O conjunto completo destas equações é altamente complexo, e não possui uma solução geral. Portanto necessitamos de simplificações sistemáticas para entender a natureza física dos movimentos de interesse. As simplificações são baseadas nas considerações de “escalas”.

Todos os termos de uma lei fundamental devem ter as mesmas dimensões físicas ou propriedades. Propriedades independentes são: comprimento, tempo, massa e temperatura (termodinâmica). As dimensões de todas as outras grandezas como volume, força, energia, são derivadas a partir destas. Usaremos o Sistema Internacional de unidades (S.I.), (*m*) metro, (*kg*) quilograma, (*s*) segundo e (*K*) grau Kelvin. Algumas unidades derivadas especiais são mostradas na tabela abaixo.

**Tabela 1.1:** Unidades derivadas de frequente uso na meteorologia.

Frequência	Hertz	$\text{Hz} - \text{s}^{-1}$
Força	Newton	$\text{N} - \text{kg} \text{ m} \text{ s}^{-2}$
Pressão	Pascal	$\text{Pa} - \text{N} \text{ m}^{-2}$
Energia	Joule	$\text{J} - \text{N} \text{ m}$
Potência	Watt	$\text{W} - \text{J} \text{ s}^{-1}$

[Note-se algumas exceções: minuto, hora, dia, *kPa* (quilo Pascal), *hPa* (hecto Pascal), *mb* (milibar),  $^{\circ}\text{C}$ , *km*].

## 1.2. Análise de escala

Uma variável como a temperatura, *T*, sobre uma região do espaço e intervalo de tempo é uma função de coordenadas, *x*, *y*, *z*, e do tempo, *t*. Isto é,  $T = T(x, y, z, t)$ . Uma variável que apresenta um único valor em cada ponto do espaço e em cada momento de tempo é chamada de variável de campo. Pressão, *p*, densidade,  $\rho$ , são variáveis de campo também.

Análise de escala é um procedimento de fazer estimativa de magnitudes dos termos de equações governantes, para o tipo de movimento de interesse, com o intuito de desprezar termos muito pequenos e assim simplificar as equações. Atribuiremos valores típicos (observados) para as magnitudes de variáveis de campo, para as amplitudes de suas flutuações, para as extensões horizontal e vertical do fenômeno, e para a duração do fenômeno. Em seguida compararemos as magnitudes relativas dos termos da equação. Um exemplo do procedimento de fazer uma estimativa da ordem da grandeza é dado abaixo.

Faremos, nesse exemplo, uma estimativa do gradiente horizontal de pressão. Variação da pressão ( $\delta p$ ) é, tipicamente, da ordem de magnitude de  $2 \text{ kPa}$  em uma distância ( $L$ ) de  $2000 \text{ km}$ , em uma situação da atuação de um ciclone extratropical no sul do Brasil. Neste caso

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\delta p}{\partial y} \right) \sim \frac{\delta p}{L} = 1 \text{ kPa} / 10^3 \text{ km} (= 10 \text{ mb} / 10^3 \text{ km}).$$

A natureza dos movimentos dominantes depende crucialmente da escala horizontal do movimento. A tabela abaixo mostra, comparativamente, as escalas horizontais dos movimentos atmosféricos.

**Tabela 1.2:** Algumas escalas horizontais: comparação.

Tipo de movimento	Escala horizontal (m)
Caminho livre de moléculas	$10^{-7}$
Turbilhões minúsculos	$10^{-2} - 10^{-1}$
Pequenos turbilhões	$10^{-1} - 1$
Redemoinhos	$1 - 10$
Rajadas de vento (pequenas)	$10 - 10^2$
Tornados	$10^2$
Cumulonimbus	$10^3$
Linhas de instabilidade, frentes	$10^4 - 10^5$
Furacões	$10^5$
Ciclones sinóticos	$10^6$
Ondas planetárias	$10^7$

### 1.3. Forças fundamentais

As forças que atuam sobre as parcelas do ar são de dois tipos:

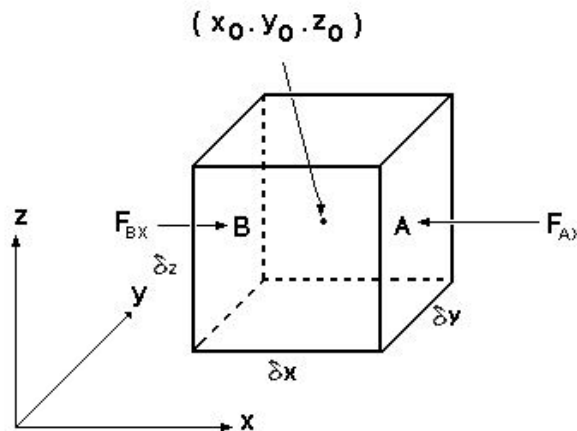
**Forças de corpo ou volumétricas** são aquelas que atuam sobre o centro da massa da partícula (ou parcela do ar), e é proporcional a massa. Ex.: gravidade.

**Forças superficiais** são aquelas que atuam através de fronteiras que separam as parcelas de fluido e sua magnitude é independente da massa da parcela. Ex.: gradiente de pressão.

#### 1.3.1. Segunda lei de Newton

A taxa de variação da quantidade de movimento de um objeto, medida relativa a um sistema de coordenadas fixo no espaço (um sistema inercial), é igual a soma de todas as forças atuantes. A lei de Newton pode ser usada para movimentos referidos a um sistema de coordenadas não inercial desde que as forças “aparentes” sejam incluídas adequadamente. As forças aparentes, no caso do estudo da dinâmica dos fluidos planetários, são força centrífuga e força de Coriolis.

#### 1.3.2. Força de gradiente de pressão



**Figura 1.1:** Elemento de volume para avaliar a força do gradiente de pressão.

Considere um elemento de volume  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ , com centro em  $x_0, y_0, z_0$ , onde a pressão é designada  $p_0$ . A pressão atuante sobre a parede A deste volume (veja Figura 1.1) é dada por

$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left( \frac{\delta x}{2} \right)^2 + \dots \text{ (série de Taylor).} \tag{1.1}$$

A força de pressão atuando sobre o volume na parede  $A$ , desprezando os termos da segunda ordem, é

$$F_{Ax} = -\left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z \quad (1.2)$$

Da mesma forma a força sobre a parede  $B$  do volume é

$$F_{Bx} = +\left(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z. \quad (1.3)$$

Portanto, o componente  $x$  da força sobre o volume é

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z. \quad (1.4)$$

A massa do elemento do volume é dada por  $m = \rho \delta x \delta y \delta z$ , portanto a força por massa unitária é

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar (média do volume).

Da mesma maneira

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.6)$$

A força vetor é dada pela combinação dos componentes dados nas Equações 1.5 e 1.6:

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{1}{\rho} \left( \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.7)$$

onde

$$\nabla \equiv \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.8)$$

na qual  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  são versores nas direções  $x, y, z$ , respectivamente.

### 1.3.3. Força gravitacional

A força gravitacional sobre uma massa unitária na superfície terrestre é dada por

$$\frac{\mathbf{F}_g}{m} \equiv \mathbf{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (1.9)$$

onde  $G$  é a constante universal de gravitação,  $M$  é massa da Terra,  $\mathbf{r}$  é o vetor de distância da parcela do centro da Terra. A sua magnitude  $|\mathbf{r}| = r = a + z$ , onde  $a$  é o raio da Terra e  $z$  a altura da parcela do ar sobre a superfície média do mar. Podemos escrever

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}_0^*}{(1 + z/a)^2} \quad (1.10)$$

onde

$$\mathbf{g}_0^* = -[GM/a^2] \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

e é o valor da força gravitacional no nível do mar. Para aplicações meteorológicas podemos considerar  $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}_0^*$ , e trataremos a força de gravidade como constante.

### 1.3.4. Força de viscosidade

Viscosidade (ou atrito interno) causa resistência ao movimento. Tratamento completo desta força vai ser abordado nas matérias sobre camada limite planetária e micrometeorologia. Uma expressão desta força, na direção de  $x$ , é dada por

$$F_{rx} = \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \nu \nabla^2 u, \quad (1.11)$$

onde  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  é chamado Laplaciano. Da mesma forma os demais componentes da força de atrito são:

$$F_{ry} = \nu \nabla^2 v; \quad F_{rz} = \nu \nabla^2 w, \quad (1.12)$$

onde  $F_{rx}$ ,  $F_{ry}$ ,  $F_{rz}$  são componentes da força de atrito nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente,  $u, v, w$  são componentes do vetor de movimento, e  $\nu$  é coeficiente de viscosidade cinemática. A partir de componentes dadas nas Equações 1.11 e 1.12 podemos facilmente compor o vetor força de viscosidade.



### 1.3.5. Sistemas de coordenadas não inerciais

Usaremos para o estudo da dinâmica atmosférica um sistema de coordenadas fixadas no centro da Terra que está em rotação. Um sistema fixo no espaço é um sistema inercial ou sistema absoluto. Um movimento aparentemente uniforme no sistema geocêntrico, de fato, está sofrendo aceleração. Portanto este sistema é “não inercial”.

As forças aparentes surgem devido à aceleração das coordenadas. Para um sistema em rotação uniforme, duas forças aparentes são necessárias para aplicar a lei de Newton: força centrífuga e força de Coriolis.

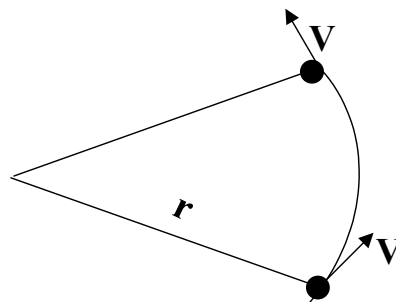
### 1.3.6. Força centrífuga

Considerando uma pequena bola de massa  $m$ , presa a uma corda em rotação com velocidade angular constante  $\omega$ , conforme Figura 1.2 obtém-se

$$d\mathbf{V}/dt = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (1.13)$$

onde  $\mathbf{V}$  é a velocidade da bola,  $|\mathbf{r}| = r$  é raio do círculo de rotação,  $\mathbf{r}$  é o vetor direcionado para fora do círculo, e  $\omega = |\omega|$ . Portanto, visto do sistema inercial, o movimento é de aceleração uniforme direcionado para o eixo de rotação. Esta aceleração é “aceleração centrípeta”.

Se observarmos o movimento do ponto de vista do sistema em rotação junto à bola, a bola é estacionária. Portanto, para aplicar a lei de Newton para movimentos nesse sistema não inercial, devemos adicionar (incluir) uma força aparente que contra-balança a força centrípeta. Esta força é igual em magnitude à força centrípeta, mas com direção oposta. Chama-se força centrífuga.

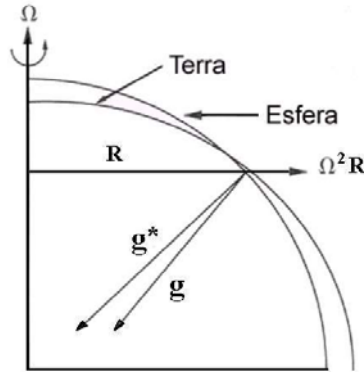


**Figura 1.2:** Força centrífuga. O eixo de rotação está perpendicular a página.

### 1.3.7. Força da gravidade

A gravidade é a soma das forças gravitacional e centrífuga sobre a superfície da Terra, e é dada por (veja a Figura 1.3).

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}. \tag{1.14}$$



**Figura 1.3:** Superfície terrestre não esférica e a gravidade em relação a uma esfera idealizada.

Nesta figura  $\mathbf{R}$  é o vetor de posição de partícula com respeito ao eixo de rotação da Terra.  $\Omega$  é o vetor de rotação da Terra. Nota-se que

- i)  $|\mathbf{g}| \leq |\mathbf{g}^*|$ ,
- ii) força gravitacional aponta para o centro da Terra, e
- iii) força da gravidade aponta para fora do centro, exceto nos pólos.

A gravidade pode ser representada como o gradiente de uma função escalar  $\Phi$  chamada “geopotencial”.

$$\nabla \Phi = -\mathbf{g} = +g\mathbf{k} \tag{1.15}$$

onde  $g = |\mathbf{g}|$  e  $\mathbf{k}$  é o vetor unitário na vertical para cima. Portanto

$$\mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = +g \mathbf{k}, \text{ ou } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = +g \text{ que pode ser integrada para obter}$$

$$\Phi(z) = \int_0^z g dz. \tag{1.16}$$

$\Phi$  é o trabalho necessário para elevar uma massa unitária para a altura  $z$  acima do nível médio do mar.

### 1.3.8. Força de Coriolis

Definiremos um sistema de coordenadas fixo à Terra na qual os eixos  $x, y, z$  apontam, respectivamente, para leste, norte e para cima, e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  são os versores e  $u, v, w$ , são os componentes do movimento nas três direções.

Se o objeto em questão está em deslocamento relativo ao sistema de coordenadas em rotação, uma força aparente adicional é necessária para que a lei de Newton seja válida.

Suponhamos que o objeto ou partícula, mova-se para leste com velocidade relativa a Terra. Neste caso a rotação da partícula é maior que a da Terra e, portanto, a força centrífuga sobre a partícula aumenta. A nova força centrífuga é dada por

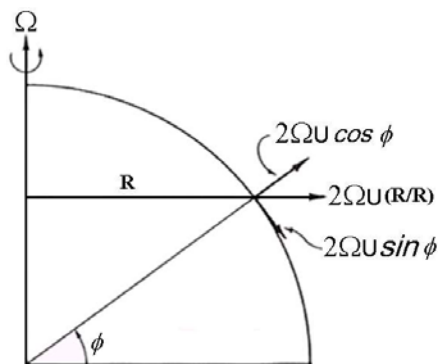


Figura 1.4: Força de Coriolis devido a rotação da Terra.

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \mathbf{R} = \underset{1}{\Omega^2 \mathbf{R}} + \underset{2}{\frac{2\Omega u \mathbf{R}}{R}} + \underset{3}{\frac{u^2 \mathbf{R}}{R^2}} \tag{1.17}$$

onde  $R = |\mathbf{R}|$ . O termo (1) é a força centrífuga devido à rotação da Terra e naturalmente, está incluído na gravidade. Os outros dois termos representam as forças defletivas, que agem para fora, ao longo do vetor  $\mathbf{R}$  (isto é, perpendicular ao eixo de rotação). Para movimentos de escala sinótica, ( $L = 10^6 m$ )  $u^2/R \ll \Omega u$  e o último termo pode ser desprezado, em primeira aproximação. O termo restante  $(2\Omega u \mathbf{R}/R)$  é a força de Coriolis. Considere a figura ao lado para obter os componentes desta força devido ao movimento de parcela para leste.

Os componentes nas direções  $y$  e  $z$  da força de Coriolis são

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u \sin\phi \tag{1.18}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u \cos\phi \tag{1.19}$$

Nota-se que as partículas em movimento para leste são desviadas para norte e as partículas em movimento para oeste são desviadas para o sul, no Hemisfério Sul (HS). Isto é, uma partícula em movimento na direção leste-oeste é desviada para a esquerda do movimento, na horizontal.

Consideramos o movimento da partícula na direção norte-sul. A medida que uma partícula se desloca para norte no HS, pela conservação do movimento angular, desenvolve-se uma velocidade relativa para oeste devido ao aumento de  $R$ . Designando  $\delta R$  a mudança da distância da partícula do eixo da Terra para um deslocamento de  $\phi_0$  a  $\phi_0 + \delta\phi$  ( $\delta\phi > 0$ ), tem-se, pela conservação de movimento angular,

$$\Omega R^2 = \left( \Omega + \frac{\delta u}{R + \delta R} \right) (R + \delta R)^2 \quad (1.20)$$

onde  $\delta u$  é a mudança na velocidade para leste. Desprezamos os termos da segunda ordem, isto é considerando que  $\delta R \ll R$ ,  $\delta R^2$  é desprezado em comparação com  $2R\delta R$ . Então

$$\delta u = -2\Omega\delta R = 2\Omega a \delta\phi \operatorname{sen}\phi_0; \quad \delta R = -a\delta\phi \operatorname{sen}\phi_0. \quad (1.21)$$

Isso nos dá

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_{Co} = 2\Omega a \frac{d\phi}{dt} \operatorname{sen}\phi = 2\Omega v \operatorname{sen}\phi, \text{ onde } v = a \, d\phi / dt. \quad (1.22)$$

No Hemisfério Sul, isto é  $\phi < 0$ , para  $v > 0$ ,  $du/dt < 0$ . Isso significa que o desvio é para esquerda do movimento.

Os dois resultados acima obtidos podem ser resumidos em uma frase. As partículas atmosféricas em movimento horizontal relativa a Terra no Hemisfério Sul são desviadas para a esquerda do movimento pela força de Coriolis. No Hemisfério Norte as partículas são desviadas para a direita do movimento.

Se uma partícula é lançada verticalmente, haverá aceleração na direção leste-oeste devido á variação da sua distância a respeito do centro da Terra.

Seguindo passos semelhantes a Equação 1.17 e 1.20 tem-se :

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_{Co} = -2\Omega w \cos\phi \quad (1.23)$$

**Exercício:** Um míssil é atirado para leste em  $43^\circ \text{ N}$  ( $2\Omega \operatorname{sen}\phi = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ). Se o míssil percorre 1000 Km com uma velocidade horizontal de  $u_0 = 1000 \text{ m s}^{-1}$ , de quanto será o desvio do percurso pela força de Coriolis?

$$v = -2u_0\Omega t \operatorname{sen}\phi_0; \quad \delta y = -\Omega u_0 t^2 \operatorname{sen}\phi \approx +50 \text{ km para sul no HN e para norte no HS.}$$

### 1.4. Estrutura da atmosfera estática

Equação do estado do ar é  $p\alpha = RT$  ou  $p = \rho RT$  onde  $R$  é constante de gás para o ar seco, sendo  $R = 287 Jkg^{-1}K^{-1}$ . Na ausência de movimentos atmosféricos a força de gradiente de pressão na vertical é balanceada pela força de gravidade, isto é

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g . \tag{1.24}$$

Integrando desta equação de  $z = \infty$  a  $z = z$ , e notando que  $p = 0$  em  $z = \infty$  e  $p = p(z)$  em  $z = z$ , tem-se

$$p(z) = \int_z^{\infty} \rho g dz .$$

Esta equação diz que a pressão em qualquer nível da atmosfera,  $z$ , é exatamente igual ao peso da coluna atmosférica unitária acima deste nível. Assim,  $P(0) = 101.325kPa$  ( $1013,25mb$ ) em  $z = 0$  (nível médio do mar) é o peso médio por área unitária ( $m^2$ ) da coluna atmosférica.

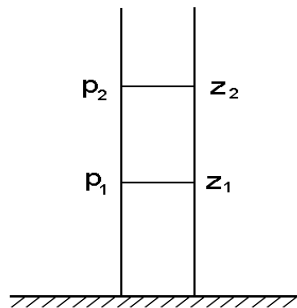
tem-se  $d\Phi = g dz$ , e  $\alpha = RT/p$ , portanto

$$d\Phi = -(RT / p) dp = -RT d \ln p . \tag{1.25}$$

Isto é, variação do geopotencial com respeito à pressão depende somente da temperatura (da coluna atmosférica). Integrando a Equação 1.25 entre  $z_1$  e  $z_2$ , (veja a Figura 1.5)

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = R \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p \tag{1.26}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são pressões em  $z_1$  e  $z_2$ .



**Figura 1.5:** Coluna atmosférica .  $p_1$  e  $p_2$  são pressões atmosféricas nos níveis  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente.

“Altura geopotencial”  $z$  é definida como  $z \equiv \Phi/g_0$ , onde  $g_0 = 9,80665 m s^{-2}$  é a média global da gravidade ao nível médio do mar. Podemos notar que  $z$  é quase igual à altura geométrica na troposfera e baixa estratosfera.

### Equação hipsométrica

A Equação 1.25 pode ser escrita, usando a definição da altura geopotencial, da seguinte forma

$$z_T \equiv z_2 - z_1 = \frac{R}{g_0} \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p, \quad (1.27)$$

onde  $z_T$  é a espessura entre duas superfícies isobáricas  $p_1$  e  $p_2$ . Agora define-se uma temperatura média da camada  $p_1 - p_2$  como

$$\langle T \rangle = \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p \left[ \int_{p_2}^{p_1} d \ln p \right]^{-1}. \quad (1.28)$$

de Equação 1.27 e 1.28

tem-se  $z_T = H \ln(p_1 / p_2)$ , onde  $H = R \langle T \rangle / g_0$  é a “altura de escala” da camada. Assim, a espessura da camada entre duas superfícies isobáricas é proporcional à temperatura média da camada.

Em uma atmosfera isotérmica de temperatura  $T$ , a altura geopotencial é proporcional ao logaritmo natural da pressão normalizada pela pressão de superfície. Isto é

$$z = H \ln(p / p_0) \quad (1.29)$$

$$p(z) = p(0) e^{-z/H}. \quad (1.30)$$

onde  $p(0) = p_0$

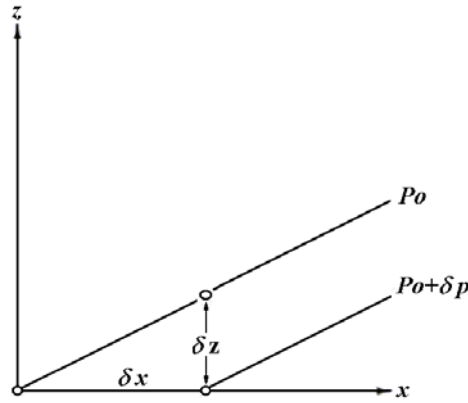
O significado destas equações é que a pressão atmosférica diminui exponencialmente com a altura.

#### 1.4.1. Pressão como coordenada vertical

Em uma chuva atmosférica,  $z$  e  $p$  mantém uma relação monotônica. Isto é, para uma dada altura  $z$  existe um único valor de pressão e vice-versa (“*single valued*”). Isso permite o uso de  $p$  (pressão) como uma coordenada independente e a altura (ou geopotencial) como variável dependente. Neste caso, o estado termodinâmico da atmosfera pode ser especificado em termos de  $\Phi(x, y, p, t)$  e  $T(x, y, p, t)$  no lugar de  $p(x, y, z, t)$  e  $T(x, y, z, t)$ .

Os componentes horizontais da força de gradiente de pressão, contém derivadas de  $p$  mantendo  $z$  constante. Quando a pressão é usada como nova coordenada, precisamos reavaliar os termos. Consideramos a Figura 1.6, a qual permite escrever

$$\left[ \frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta x} \right]_z = \left[ \frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \left( \frac{\delta z}{\delta x} \right)_p \quad (1.31)$$



**Figura 1.6:** Esquemática para transformar a força de gradiente de pressão em coordenadas isobáricas.

Onde o subscrito é a variável que permanece constante na obtenção da derivada ou diferença.

No limite  $\delta x, \delta y = 0$ ,  $\left[ \frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \rightarrow \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x$

onde o sinal negativo indica que  $\delta z < 0$  para  $\delta p > 0$ . Obtendo limites tem-se

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = - \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \rightarrow - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \quad (1.32)$$

Da mesma maneira

$$- \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \quad (1.33)$$

Nestas expressões a densidade ( $\rho$ ) desaparece, e esta é uma vantagem muito grande.

Na forma vetorial podemos escrever a força de gradiente de pressão em coordenadas isobáricas

$$- (1/\rho) \nabla_z p = - \nabla_p \Phi, \text{ onde } \nabla_p \equiv \mathbf{i}(\partial/\partial x)_p + \mathbf{j}(\partial/\partial y)_p$$

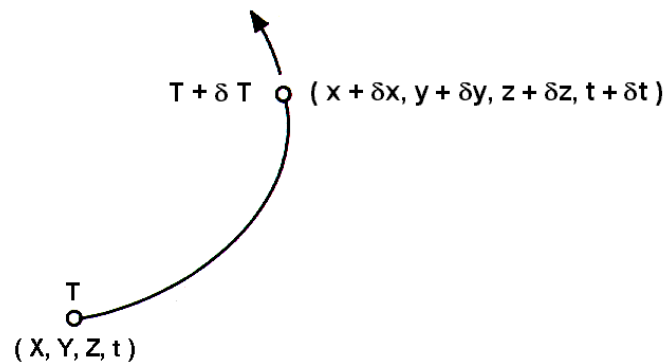
e os sufixos indicam a superfície na qual as derivadas são avaliadas.

## Capítulo 2

Os três princípios fundamentais que regem os movimentos atmosféricos associados com fenômenos meteorológicos são conservação de massa, conservação de quantidade de movimento e conservação de energia. As equações matemáticas correspondentes podem ser obtidas usando dois tipos de volume de controle infinitesimal: (1) paralelepípedo de lados  $\delta x, \delta y, \delta z$  fixo relativo a sistema de coordenadas, (2) uma parcela infinitesimal “identificada” que desloca com o campo de movimento do fluido. Esta massa sempre consiste das mesmas partículas do fluido. A primeira abordagem é Euleriana e a segunda é Lagrangeana. A descrição Euleriana é conveniente para resolver o problema matemático, e a descrição Lagrangeana é conveniente para expressar as equações de conservação.

### 2.1. Derivada total

Considera-se a Figura 2.1 na qual a parcela de referência (ou de controle) está com a temperatura  $T$  no momento  $t$  e na posição  $(x, y, z)$ . A mesma parcela se encontra na posição  $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$  no momento  $t + \delta t$  com a temperatura  $T + \delta T$ .



**Figura 2.1:** Trajetória de uma parcela do ar.

Deve-se lembrar que a posição  $(x, y, z)$  da parcela é função do tempo,  $t$ . Isto é:  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ . Seguindo a parcela, a temperatura ( $T$ ) da parcela é função de  $t$ , e a taxa de variação de temperatura da parcela com o tempo é designada  $DT/Dt$ . Esta derivada é chamada derivada total ou substancial.

Pode-se expressar a diferencial  $\delta T$  em uma série de Taylor dos incrementos  $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ , da seguinte forma



$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z + \text{termos de alta ordem.} \quad (2.1)$$

Termos de alta ordem contém em  $\delta x^2, \delta y^2, \delta z^2, \delta t^2, \delta x^3$ , etc. Por definição

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t}. \quad (2.2)$$

Assim obtém-se:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{Dx}{Dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{Dy}{Dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{Dz}{Dt}. \quad (2.3)$$

Designando

$$\frac{Dx}{Dt} \equiv u, \quad \frac{Dy}{Dt} \equiv v, \quad \frac{Dz}{Dt} \equiv w, \quad (2.4)$$

tem-se

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right), \text{ ou} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \mathbf{U} \cdot \nabla T \quad (2.6)$$

onde

$$\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.7)$$

na qual  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  são versores e  $u, v, w$  são os componentes de movimento nas direções  $x, y, z$ , respectivamente.  $\frac{\partial T}{\partial t}$  é a taxa de variação da temperatura em um ponto fixo  $(x, y, z)$  e é chamada de derivada local, e  $\mathbf{U} \cdot \nabla T$  é a derivada advectiva.

### 2.1.1. Derivada total de um vetor em um sistema de coordenadas em rotação

Um vetor qualquer  $\mathbf{A}$  em um sistema inercial é dado por:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad (2.8)$$

onde  $A_x, A_y, A_z$  são componentes de  $\mathbf{A}$  nas direções  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ou nas direções  $x, y, z$ , respectivamente.

Em um sistema de coordenadas em rotação com velocidade angular  $\Omega$ ,  $\mathbf{A}$  é dado por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'A'_x + \mathbf{j}'A'_y + \mathbf{k}'A'_z \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  são versores nas direções  $x', y', z'$  em um dado instante.  $A'_x, A'_y, A'_z$  são os componentes de  $\mathbf{A}$  nestas direções.

Seja  $D_a \mathbf{A} / Dt$  a derivada total no sistema inercial. Isto é

$$\begin{aligned} \frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} &= \mathbf{i} \frac{DA_x}{Dt} + \mathbf{j} \frac{DA_y}{Dt} + \mathbf{k} \frac{DA_z}{Dt} = \\ &\mathbf{i}' \frac{DA'_x}{Dt} + \mathbf{j}' \frac{DA'_y}{Dt} + \mathbf{k}' \frac{DA'_z}{Dt} + \frac{D\mathbf{i}'}{Dt} A'_x + \frac{D\mathbf{j}'}{Dt} A'_y + \frac{D\mathbf{k}'}{Dt} A'_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora vamos definir

$$\mathbf{i}' \frac{DA'_x}{Dt} + \mathbf{j}' \frac{DA'_y}{Dt} + \mathbf{k}' \frac{DA'_z}{Dt} \equiv \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \quad (2.11)$$

Assim tem-se

$$\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \left( \frac{D\mathbf{i}'}{Dt} A'_x + \frac{D\mathbf{j}'}{Dt} A'_y + \frac{D\mathbf{k}'}{Dt} A'_z \right) = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}, \quad (2.12)$$

$$\text{porque } \frac{D\mathbf{i}'}{Dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}', \frac{D\mathbf{j}'}{Dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}', \frac{D\mathbf{k}'}{Dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}'. \quad (2.13)$$

## 2.2. Forma vetorial da equação de movimento

A equação de movimento é dada pela igualdade entre a aceleração medida nas coordenadas não inerciais e o somatório de forças verdadeiras por massa unitária atuantes:

$$\frac{D_a \mathbf{U}_a}{Dt} = \sum \mathbf{F}. \quad (2.14)$$

O lado direito é a soma de forças verdadeiras na partícula de referência, onde  $\mathbf{U}_a$  é o movimento visto no sistema inercial. A relação entre  $\mathbf{U}_a$  e  $\mathbf{U}$  (movimento visto no sistema em rotação) é dada por:

$$\frac{D_a \mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o “vetor posição” da parcela atmosférica. Assim  $\mathbf{U}_a = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  na qual  $\mathbf{U}_a$  é a velocidade absoluta,  $\mathbf{U}$  é a velocidade relativa a Terra e  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  é a velocidade devido a rotação da Terra. Agora

$$\frac{D_a \mathbf{U}_a}{Dt} = \frac{D\mathbf{U}_a}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_a \quad (2.16)$$

$$\frac{D_a \mathbf{U}_a}{Dt} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{R}$  é vetor perpendicular ao eixo de rotação com magnitude igual a distância entre o eixo e a parcela (ver Figura 2.2).

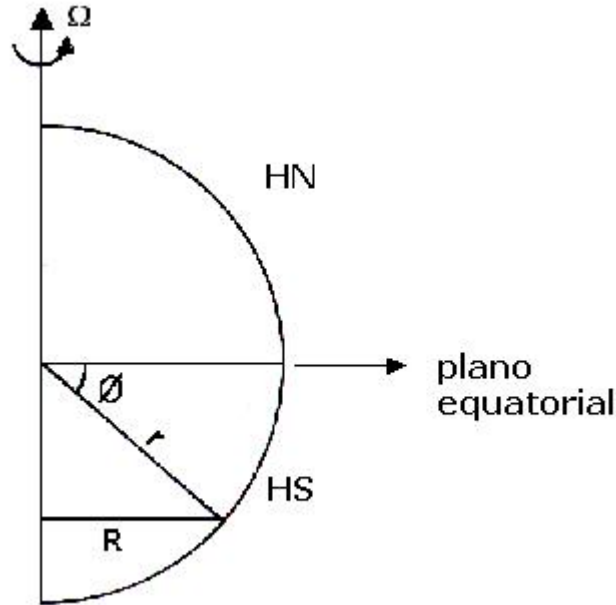


Figura 2.2: Seção meridional da Terra.

Assumindo que as forças reais são apenas gradiente de pressão, gravidade e atrito, a equação de movimento em coordenadas fixas à Terra tomará a forma

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r \quad (2.18)$$

na qual o termo  $-\Omega^2 \mathbf{R}$  foi absorvido por  $\mathbf{g}$ ,  $D\mathbf{U}/Dt$  é a aceleração visto no sistema fixo à Terra,  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$  é a força de Coriolis, e  $\mathbf{F}_r$  é o atrito.

**2.2.1. Equações componentes em coordenadas esféricas (coordenadas:  $\lambda, \phi, z$ )**

No que segue  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  são vetores unitários (ou versores) direcionados para leste, norte e para cima respectivamente.  $\phi$  é latitude e  $\lambda$  é longitude da parcela

$$\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$\text{onde } u \equiv r \cos\phi \frac{D\lambda}{Dt} ; v \equiv r \frac{D\phi}{Dt} ; w \equiv \frac{Dz}{Dt} . \quad (2.19)$$

Muito aproximadamente, para movimentos do ar na troposfera,  $r \approx a$ , e assim:

$$u \equiv a \cos\phi \frac{D\lambda}{Dt} , \quad v \equiv a \frac{D\phi}{Dt} , \quad w \equiv \frac{Dz}{Dt} , \text{ onde } a \text{ é o raio da Terra.}$$

Lembre-se de que  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  não são constantes, e na expansão do termo de aceleração, tem-se de levar em conta a variação espacial de  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , e assim

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \mathbf{i} \frac{Du}{Dt} + \mathbf{j} \frac{Dv}{Dt} + \mathbf{k} \frac{Dw}{Dt} + u \frac{D\mathbf{i}}{Dt} + v \frac{D\mathbf{j}}{Dt} + w \frac{D\mathbf{k}}{Dt} . \quad (2.20)$$

Para obter as equações componentes, é necessário primeiro calcular as razões (taxas) de variação dos vetores unitários seguindo o movimento.

Primeiro consideramos  $D\mathbf{i}/Dt$ . Decompondo a derivada total como na seção 2.1 e notando que  $\mathbf{i}$  é função somente de  $x$ , isto é, versor apontado para leste não varia sua orientação nem com latitude nem com altitude, tem-se:  $D\mathbf{i}/Dt = u(\partial\mathbf{i}/\partial x)$ . Das Figuras 2.3 e 2.4 verificamos que o vetor  $\partial\mathbf{i}/\partial x$  está direcionado para o eixo de rotação. Então

$$\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x} = \frac{1}{a \cos\phi} (\mathbf{j} \sin\phi - \mathbf{k} \cos\phi) . \quad (2.21)$$

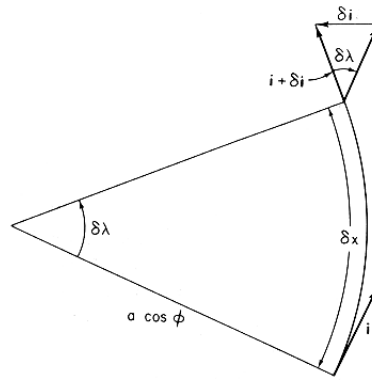


Figura 2.3: Dependência longitudinal do vetor unitário *i*.

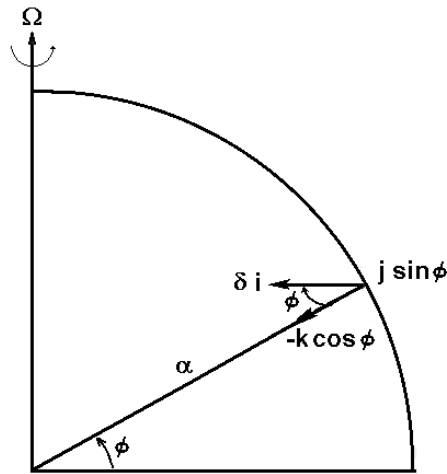
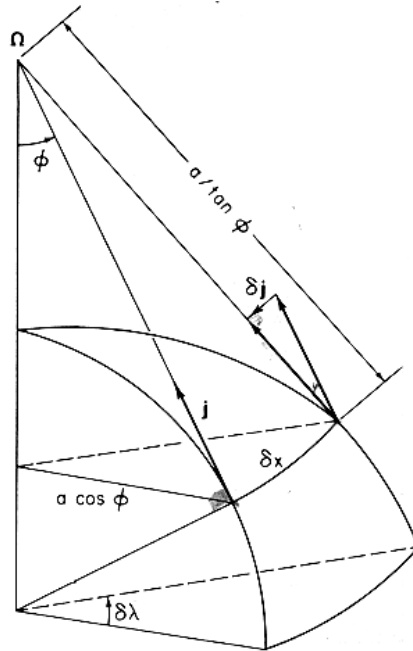


Figura 2.4: Decomposição de  $\delta \mathbf{i}$  nos componentes vertical e na direção norte.

Por isso

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = \frac{u}{a \cos \phi} (\mathbf{j} \sin \phi - \mathbf{k} \cos \phi) \tag{2.22}$$

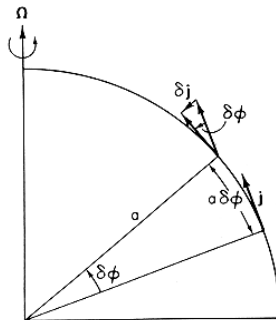
Considerando agora  $D\mathbf{j}/Dt$ , notamos que  $\mathbf{j}$  é uma função somente de  $x$  e  $y$ . Assim, com o auxílio das Figuras 2.5 e 2.6, vê-se que, para movimento na direção leste,  $|\delta \mathbf{j}| = \delta x / (a / \tan \phi)$ . Já que o vetor  $\partial \mathbf{j} / \partial x$  está direcionado na direção negativa de  $x$ , tem-se então  $\partial \mathbf{j} / \partial x = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{j} / \delta x = -(\tan \phi / a) \mathbf{i}$ .



**Figura 2.5:** Dependência do vetor unitário **j** sobre a longitude.

Com o auxílio da Figura 2.6 pode-se ver que, para movimento na direção norte,  $|\delta \mathbf{j}| = \delta \phi$ . Mas  $\delta y = a \delta \phi$  e  $\delta \mathbf{j}$  está direcionado verticalmente para baixo, de tal maneira que:

$$\delta \mathbf{j} / \delta y = -\mathbf{k} / a, \text{ e } D\mathbf{j} / Dt = -(u \operatorname{tg} \phi) \mathbf{i} / a - v \mathbf{k} / a. \quad (2.23)$$



**Figura 2.6:** Dependência do vetor unitário **j** sobre a latitude.

Finalmente, por argumentos similares, pode-se mostrar que:

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = \mathbf{i} \frac{u}{a} + \mathbf{j} \frac{v}{a} \quad (2.24)$$

Substituindo as expressões na equação de movimento e reagrupando os termos, obtém-se a decomposição em coordenadas polares esféricas da aceleração da parcela seguindo o movimento relativo a Terra:

$$\frac{DU}{Dt} = \left( \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \mathbf{k} \quad (2.25)$$

As decomposições das forças nas três direções  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  são obtidas da seguinte forma:

- Componentes da força de Coriolis

$$-2\Omega \times \mathbf{U} = -(2\Omega w \cos \phi - 2\Omega v \sin \phi) \mathbf{i} - 2\Omega u \sin \phi \mathbf{j} + 2\Omega u \cos \phi \mathbf{k} \quad (2.26)$$

- Componentes da força de gradiente de pressão

$$\nabla p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.27)$$

- Componentes da gravidade

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{k} \quad (2.28)$$

- Componentes da força de atrito

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{i} F_{rx} + \mathbf{j} F_{ry} + \mathbf{k} F_{rz} \quad (2.29)$$

Substituindo as expressões 2.25, 2.26, 2.27, 2.28 e 2.29 na equação de movimento 2.18, e separando os componentes tem-se:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + F_{rx} \quad (2.30)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + F_{ry} \quad (2.31)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi + F_{rz} \quad (2.32)$$

onde

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ etc.} \quad (2.33)$$

nas quais  $u, v, w$  são componentes de movimento da parcela atmosférica relativo à Terra. Equações 2.30 e 2.31 são equações do movimento horizontal, enquanto a Equação 2.32 aplica-se para movimentos verticais.

### 2.3. Análise de escala das equações de movimento

Para os movimentos da escala “sinótica” de médias latitudes, as observações permitem atribuir as seguintes ordens de magnitude para as variáveis atmosféricas.

$U \sim 10 \text{ ms}^{-1}$  (escala do movimento horizontal), para  $u, v, \delta u, \delta v$

$W \sim 1 \text{ cms}^{-1}$  (velocidade vertical), para  $w, \delta w$

$L \sim 10^6 \text{ m}$  (“horizontal length-scale”), para  $\delta x, \delta y$

$H \sim 10^4 \text{ m}$  (escala de profundidade), para  $\delta z$

$\delta p/\rho \sim 10^3 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  (escala de flutuação de pressão horizontal)

$L/U \sim 10^5 \text{ s}$  (escala temporal), para  $\delta t$ .

Em latitudes médias em torno de  $\phi = 45^\circ \text{ S}$  tem-se  $f_0 \equiv 2\Omega \text{ sen } \phi_0 = 2\Omega \text{ cos } \phi_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Com esses valores típicos substituídos, tem-se os valores da ordem de magnitude dos termos das duas equações de movimento horizontal, conforme Tabela 2.1 abaixo. Nota-se que as ordens de magnitude variam de  $10^{-3} \text{ m s}^{-2}$  a  $10^{-12} \text{ m s}^{-2}$ . Assim, alguns termos são tão extremamente pequenos que podem ser desprezados sem causar prejuízo à essência da dinâmica dos movimentos atmosféricos da escala sinótica.

**Tabela 2.1:** Ordens de magnitude dos termos das equações de movimento horizontal.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
x-Eq.	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \text{ sen } \phi$	$+2\Omega w \text{ cos } \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uw \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
y-Eq.	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \text{ sen } \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Escalas	$U^2/L$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{\delta P}{L}$	$\frac{vU}{H^2}$
$(\text{ms}^{-2})$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-12}$



### 2.3.1. Aproximação geostrófica e o vento geostrófico

Para distúrbios atmosféricos “sinóticos” das latitudes médias, como uma primeira aproximação, pode-se desprezar todos os termos, exceto os termos de mais alta ordem de magnitude. Assim tem-se

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.34)$$

onde  $f \equiv 2\Omega \sin\phi$  é chamado “parâmetro de Coriolis”. As equações expressam um balanço (equilíbrio) entre a força de Coriolis e a força de gradiente de pressão na horizontal. Esta relação é uma “equação diagnóstica”, pois não contém a derivada no tempo. (Equações que contém derivadas no tempo são “prognósticas”).

Definimos “vento geostrófico” como

$$\mathbf{V}_g \equiv \mathbf{i}u_g + \mathbf{j}v_g, \quad (2.35)$$

O que satisfaz perfeitamente as equações do balanço geostrófico 2.34. Na forma vetorial, a definição do vento geostrófico é expressa por:

$$\mathbf{V}_g \equiv \mathbf{k} \times (\nabla p) / (\rho f). \quad (2.36)$$

A Figura 2.7 esquematiza o vento geostrófico em relação ao campo de pressão no HS. Em geral, o vento geostrófico aproxima o vento real dentro de uma diferença de 10 a 20% em latitudes médias.

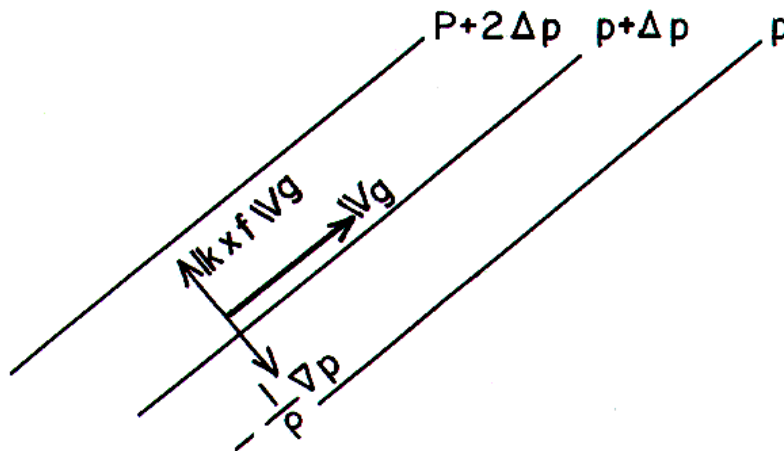


Figura 2.7: Vento geostrófico em relação as isóbaras.

**2.3.2. Equações prognósticas aproximadas: O número de Rossby**

Retendo os termos da ordem de magnitude  $10^{-4} \text{ ms}^{-2}$  ou maiores nas equações de movimento horizontal, tem-se :

$$\frac{Du}{Dt} = f_v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g) \tag{2.37}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -f_u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - u_g) \tag{2.38}$$

O fato do vento estar em um equilíbrio geostrófico facilita a análise dos movimentos associados aos sistemas de tempo em latitudes médias. Todavia, as equações diagnósticas não servem para prognosticar ou prever o desenvolvimento desses movimentos. Acelerações são de uma ordem de magnitude menor que as forças de Coriolis e de gradiente de pressão e portanto, um pequeno erro na medida dessas forças pode causar grandes erros na estimativa das acelerações. Uma medida conveniente da razão do termo de aceleração em relação à força de Coriolis é a razão entre suas características magnitudes  $(U^2/L)/(f_0U)$ . Esta razão é definida como número de Rossby,  $R_o$ , ou  $R_o = U/(Lf_0)$ . Quanto menor for  $R_o$  maior o grau da aproximação geostrófica.

**2.3.3. Aproximação hidrostática**

Substituindo as ordens de magnitude dos parâmetros característicos dos sistemas sinóticos de latitudes médias na 3ª equação de movimento, tem-se as ordens de magnitude dos termos dadas na tabela abaixo:

**Tabela 2.2:** Ordens de magnitude dos termos da equação de movimento vertical.

z-Eq.	$Dw/Dt$	$-2\Omega u \cos\phi$	$-(u^2 + v^2)/a$	$-\rho^{-1}\partial p/\partial z$	$-g$	$+F_{rz}$
Escala	$UW/L$	$f_0U$	$U^2/a$	$P_0/(\rho H)$	$g$	$\surd WH^{-2}$
$\text{m s}^{-2}$	$10^{-7}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	10	10	$10^{-15}$

Nota-se que os termos das forças de gradiente de pressão (vertical) e gravidade são muito maiores do que os demais termos. Assim tem-se, muito aproximadamente, a aproximação hidrostática:

$$(1/\rho)(\partial p/\partial z) = -g \tag{2.39}$$

Todavia, precisamos saber se as partes da pressão e densidade que variam horizontalmente, associados aos sistemas sinóticos, estão em equilíbrio hidrostático. Para

tanto, vamos definir uma pressão padrão  $p_0(z)$  [média horizontal] e a densidade correspondente  $\rho_0(z)$  que estejam em equilíbrio hidrostático. Assim, podemos escrever

$$(1/\rho_0)(\partial p_0/\partial z) = -g \quad (2.40)$$

e

$$p(x,y,z,t) = p_0(z) + p'(x,y,z,t) \quad (2.41)$$

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0(z) + \rho'(x,y,z,t) \quad (2.42)$$

onde  $p'$  e  $\rho'$  são desvios. Para uma atmosfera em repouso,  $p'$  e  $\rho' = 0$ . Em geral  $p' \ll p_0$  e  $\rho' \ll \rho_0$ .

Após a substituição de Equações 2.41 e 2.42 na Equação 2.39 tem-se :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \quad (2.43)$$

As magnitudes dos termos desta equação são:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \sim \frac{\delta P}{\rho_0 H} \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{\rho' g}{\rho_0} \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-2}$$

Comparando as magnitudes desses termos com os demais da terceira equação de movimento, ainda podemos desprezar todos os termos, exceto a força de gradiente de pressão e gravidade.

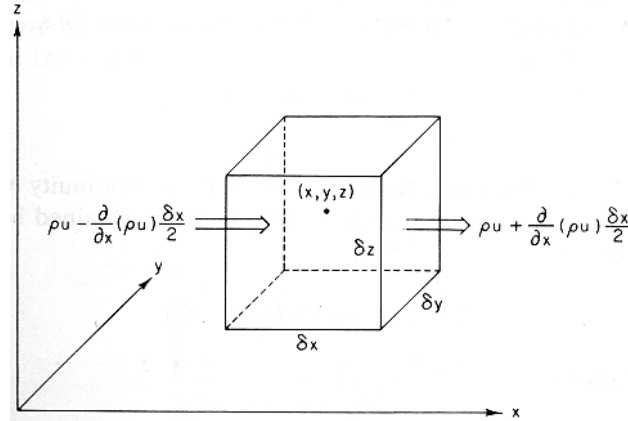
Assim tem-se, muito aproximadamente,

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0. \quad (2.44)$$

Isto é, para os movimentos da escala sinótica nas latitudes médias, as acelerações verticais são desprezíveis. Portanto, não podemos deduzir os movimentos verticais usando a equação de movimento.

### 2.4. Equação de continuidade

O princípio de conservação de massa fornece a equação da continuidade. Considere um elemento de volume  $\delta x, \delta y, \delta z$ , o qual está fixo em relação a um sistema de coordenadas cartesianas (volume de controle fixo) conforme a Figura 2.8 abaixo.



**Figura 2.8:** Elemento de volume na forma de paralelepípedo com lados  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

Fluxo de massa ( $kg\ s^{-1}\ m^{-2}$ ) em um ponto é dado pelo produto da densidade e a velocidade. O fluxo de massa através de uma dada área infinitesimal é o produto de densidade do fluido e o componente do movimento perpendicular à área. A razão (taxa) líquida de fluxo do fluido para dentro do volume é dada pelo somatório dos fluxos líquidos nas três direções,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Considerando a direção  $x$ , na Figura 2.8, tem-se fluido entrando o volume através da parede a esquerda e fluido saindo através da parede a direita. O fluxo líquido é a diferença entre os dois fluxos. Assim sendo, obtem-se o fluxo líquido para dentro do volume pelo componente  $u$  do movimento da seguinte forma:

$$\left[ \rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z. \quad (2.45)$$

Da mesma forma, a taxa de massa que acumula no volume devido aos movimentos  $v$  e  $w$  são, respectivamente,

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \delta x \delta y \delta z \quad (2.46)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \delta x \delta y \delta z \quad (2.47)$$

Somando os três termos 2.45, 2.46 e 2.47, a taxa total de acúmulo de massa dentro do volume é

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \delta x \delta y \delta z. \quad (2.48)$$

A taxa por volume unitário é

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}). \quad (2.49)$$

Esta deve igualar a taxa de aumento de massa por volume unitário,  $\partial \rho / \partial t$ . Isto é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (2.50)$$

Mas,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \equiv \rho \nabla \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho.$$

Portanto

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.51)$$

O significado da equação é o seguinte: a razão fracional do aumento de densidade, seguindo a parcela, é igual a convergência (ou divergência negativa) da velocidade.

### 2.4.1. Análise de escala da equação de continuidade

Um fluido incompressível mantém sua densidade constante seguindo o movimento. Isto é  $D\rho / Dt = 0$ . (2.52)

Seguindo a técnica desenvolvida na seção 2.3.3 podemos escrever a equação de continuidade da seguinte forma:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho' \right)}_A + \underbrace{\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}_B + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{U}}_C \approx 0 \quad (2.53)$$

onde  $\rho'$  designa o desvio local da densidade com referência ao seu valor mediado horizontalmente,  $\rho_0(z)$ . Para movimento de escala sinótica tem-se  $\rho' / \rho_0 \sim 10^{-2}$ , de maneira que, usando as escalas características dadas na seção 2.3, achamos que o termo A tem magnitude de  $10^{-7} s^{-1}$ . Para movimentos em que a escala de profundidade  $H$  é comparável com a altura de escala de densidade  $H$ , ou  $\ln \rho_0 / dz \sim H^{-1}$ , de tal maneira que a ordem de magnitude do termo B é  $10^{-6} s^{-1}$ .

Expandindo o termo C em coordenadas cartesianas, tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.54)$$

Para movimentos de escala sinótica os termos  $\partial u/\partial x$  e  $\partial v/\partial y$  tendem a ser de igual magnitude, mas de sinais opostos. Assim, eles tendem a equilibrar-se de tal maneira que:

$$D \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-1} \frac{U}{L} \approx 10^{-6} s^{-1} \quad (2.55)$$

e, além disso,

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{H} \approx 10^{-6} s^{-1} \quad (2.56)$$

Assim, os termos B e C são, cada um, uma ordem de magnitude maior que o termo A e em uma primeira aproximação, os termos B e C equilibram-se na equação da continuidade. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{d}{dz} (\ln \rho_0) = 0 \quad (2.57)$$

ou na forma vetorial

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{U}) = 0. \quad (2.58)$$

Isto é, para movimentos de escala sinótica, o fluxo de massa calculado, usando o estado básico da densidade  $\rho_0$ , é não divergente. Esta aproximação é similar à idealização da incompressibilidade que é freqüentemente usada em mecânica dos fluidos. Contudo, um fluido *incompressível* tem densidade constante ao longo do movimento:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.59)$$

Assim, a divergência de velocidade torna-se nula ( $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ) num fluido incompressível. A equação anterior mostra que para um escoamento puramente horizontal a atmosfera comporta-se como se fosse um fluido incompressível. Contudo, quando há movimento vertical, a compressibilidade associada com a dependência de altura de  $\rho_0$  deve ser levada em conta.

## 2.5. Equação termodinâmica

Esta equação é obtida a partir do princípio de conservação de energia, ou seja, a 1ª lei de termodinâmica. Esta lei diz que a mudança (ou variação) da energia interna de um sistema é igual à diferença entre o calor adicionado ao sistema e o trabalho feito pelo sistema.

Para um gás como o ar,  $c_v \delta T$  é a variação de energia interna por massa unitária, onde  $c_v$  é o calor específico a volume constante,  $p \delta \alpha$  é o trabalho feito pelo sistema (parcela de ar) contra a pressão para expansão, e  $\delta Q$  é a quantidade de calor infinitesimal adicionado.

A lei é expressa da seguinte forma:

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = J \quad (2.60)$$

utilizando a equação do estado,  $p\alpha = RT$ , onde  $J \equiv DQ/Dt$  é a taxa de adição de calor.

A equação também pode ser escrita da seguinte forma:

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{Dp}{Dt} = J, \quad (2.61)$$

onde  $c_p$  é o calor específico a pressão constante, e  $C_v = C_p - R$

Dividindo a equação por  $T$ , tem-se:

$$c_p \frac{D \ln T}{Dt} - R \frac{D \ln p}{Dt} = \frac{J}{T} \equiv \frac{Ds}{Dt}, \quad (2.62)$$

onde  $s$  é a entropia.

A última equação fornece a taxa de variação de entropia por massa unitária, seguindo o fluxo do fluido para processos termodinamicamente reversíveis. Isto é, para processos em que a parcela muda de seu estado e volta para o mesmo estado inicial sem causar mudanças no estado do fluido vizinho. Para tais processos  $s$  é uma variável de campo e  $Ds$  é um diferencial total (perfeito) e  $Ds/Dt$  é uma derivada total. Deve-se notar que calor não é uma variável de campo e a taxa de aquecimento  $J$  não é uma derivada total. As constantes tem os seguintes valores numéricos para o ar seco.

$$\begin{aligned} C_p &= 1004 \text{ J Kg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ R &= 287 \text{ J Kg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ C_v &= C_p - R = 717 \text{ J Kg}^{-1}\text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

As definições e explanações dadas abaixo são de grande importância:

- **Processo reversível** é um processo no qual o sistema muda de seu estado e retorna ao estado original sem causar nenhuma mudança na sua vizinhança. Para tais processos a entropia é uma variável de campo que depende somente do estado do fluido.  $Ds$  é um diferencial perfeito e  $Ds/Dt$  é uma derivada total.

- **Processo adiabático** é um processo reversível no qual não ocorre troca de calor entre o sistema e sua vizinhança, ou seja,  $dQ = 0$ . Nesse caso a equação termodinâmica é dada por :

$$c_p D \ln T = R D \ln p \quad (2.63)$$

### 2.5.1. Temperatura potencial

Integrando a equação termodinâmica para processos adiabáticos (Equação 2.63) de um estado  $(p, T)$  a um estado referencial  $(p_s, \theta)$  tem-se :

$$\theta = T(p_s / p)^{R/c_p} \quad (2.64)$$

Esta equação é chamada equação de Poisson. A temperatura  $\theta$ , é definida como temperatura potencial. Esta é a temperatura que uma parcela de ar, a uma pressão  $p$  e temperatura  $T$ , teria se fosse expandida ou comprimida adiabaticamente a uma pressão  $p_s$ . Em meteorologia usamos  $p_s = 1000$  hPa (100KPa). Assim, cada e toda parcela de ar, possui uma única temperatura potencial.

Longe das regiões de precipitação ativa, os movimentos sinóticos são aproximadamente adiabáticos. Portanto,  $\theta$  é quase conservada. Obtendo a derivada logarítmica da equação de Poisson tem-se

$$c_p \frac{D \ln \theta}{Dt} = c_p \frac{D \ln T}{Dt} - R \frac{D \ln p}{Dt} = Ds / Dt . \quad (2.65)$$

Isto é, para processos reversíveis a variação diferencial da temperatura potencial é proporcional a variação da entropia.

Processo isentrópico é o processo que conserva  $\theta$  ou, as parcelas de ar que conservam suas  $\theta$  (isto é, para movimentos ao longo de superfícies de  $\theta = \text{constante}$ ) conservam a sua entropia.

### 2.5.2. Decréscimo adiabático de temperatura (com altura), e a estabilidade estática

Usando a equação hidrostática, a equação de Poisson derivada logaritmicamente com respeito a  $z$  pode ser escrita:

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} . \quad (2.66)$$

Para uma atmosfera na qual a temperatura potencial é constante com a altura, tem-se:

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \equiv \Gamma_d . \quad (2.67)$$

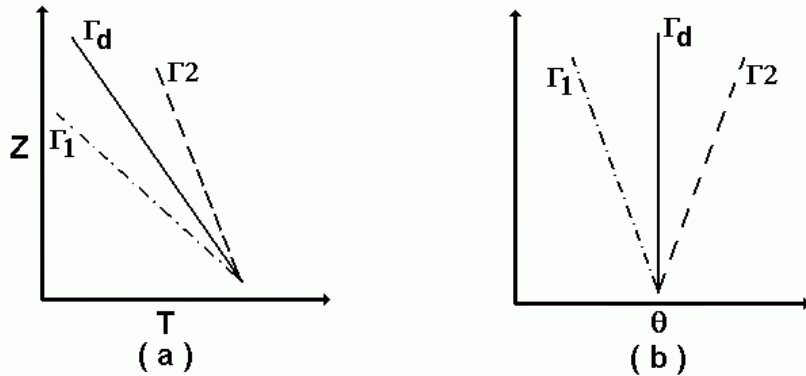


Substituição de 2.68 em 2.67 fica

$$-\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma, \tag{2.68}$$

onde  $\Gamma \equiv -\partial T/\partial z$  é a taxa de decréscimo da temperatura com altura na atmosfera.  $\Gamma_d$  é chamada taxa adiabática de decréscimo de temperatura com altura.

Para  $\Gamma < \Gamma_d$ ,  $\theta$  aumenta com a altura. Neste caso, uma parcela que deslocada verticalmente terá sua temperatura maior (menor) que a do ambiente, para deslocamentos para baixo (para cima) (veja Figura 2.9). Isto é, a parcela se encontra pesada (leve) em relação ao novo ambiente, para deslocamento para cima (baixo). Portanto a parcela tende a retornar para a sua posição original. Neste caso a atmosfera é dita “estavelmente estratificada”.



**Figura 2.9:** Estabilidade estática. Perfil de temperatura (a) e perfil temperatura potencial (b). Variação vertical  $\Gamma_1$  instável.  $\Gamma_2$  estável.  $\Gamma_d$  é decaimento de temperatura adiabática.

De fato, uma parcela deslocada verticalmente numa atmosfera estavelmente estratificada sofre oscilações em torno do nível original. A frequência destas oscilações é dada por:

$$N^2 = g \frac{d \ln \theta_0}{dz}, \tag{2.69}$$

onde  $\theta_0(z)$  é a distribuição da temperatura potencial na vertical da atmosfera.  $N$  é chamada “frequência de flutuação” (ou frequência Brunt -Vaisälä).

Para  $N^2 > 0 \rightarrow$  oscilação

Para  $N^2 < 0 \rightarrow$  instabilidade

Ou,

$$d\theta_0 / dz > 0 \rightarrow \text{estável}$$

$$d\theta_0 / dz = 0 \rightarrow \text{neutra}$$

$$d\theta_0 / dz < 0 \rightarrow \text{instável}$$

### 2.5.3. Análise de escala da equação termodinâmica

Uma vez que as variações na  $\theta$  são pequenas em comparação com o seu valor típico  $\theta_0$ , é conveniente escrever

$$\theta_{tot} \equiv \theta_0(z) + \theta(x, y, z, t). \quad (2.70)$$

Substituindo Equação 2.70 na equação termodinâmica simplificada, tem-se

$$\frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \cdot \nabla \theta \right) + w \frac{d \ln \theta_0}{dz} = \frac{J}{c_p T}. \quad (2.71)$$

Longe de regiões de precipitação ativa  $J/c_p \leq 1^\circ/\text{dia}$ . Colocando valores típicos da seção 2.3

nos termos da Equação 2.71 tem-se  $\frac{T}{\theta_0} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \cdot \nabla \theta \right) \sim \frac{\theta U}{L} \sim 4^\circ \text{Cd}^{-1}$ , e a advecção vertical,

$w \left( \frac{T}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \right) = w(\Gamma_d - \Gamma) \sim 4^\circ \text{Cd}^{-1}$ . Podemos, então, como uma primeira aproximação

desprezar o termo de aquecimento. Assim tem-se

$$\frac{D\theta}{Dt} + w \frac{d\theta_0}{dz} \approx 0. \quad (2.72)$$

## Capítulo 3

### 3.1. Equações básicas em coordenadas isobáricas

As equações do movimento horizontal aproximadas podem ser escritas

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (3.1)$$

$$\text{onde } \mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \text{ e } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.2)$$

A mesma pode ser escrita, nas coordenadas isobáricas

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla_p \Phi, \quad (3.3)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}, \quad (3.4)$$

na qual  $\omega \equiv Dp/Dt$ .

Vento geostrófico nas coordenadas isobáricas é

$$f\mathbf{V}_g = \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi. \quad (3.5)$$

Pode-se notar que, nas coordenadas isobáricas, o vento geostrófico não depende da densidade, e implica que um dado gradiente de geopotencial corresponde a um único valor do vento geostrófico. Uma outra grande vantagem desta coordenada é  $\nabla_p \cdot \mathbf{V}_g = 0$  para  $f$  constante. Isto é, o vento geostrófico para  $f$  constante é não divergente.

Equação de continuidade pode ser obtida diretamente nas coordenadas isobáricas  $x, y, p$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (3.6)$$

(O procedimento é explicado na aula ou os alunos devem procurar a maneira de chegar a esta equação.)

Equação termodinâmica em coordenadas isobáricas é escrita

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\alpha}{c_p} \omega = \frac{J}{c_p} \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) - S_p \omega = \frac{J}{c_p} \tag{3.7}$$

onde  $S_p \equiv \left(\frac{RT}{c_p p} - \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}\right)$  (3.8)

é um parâmetros de estabilidade estática, que também pode ser escrito

$$S_p = (\Gamma_d - \Gamma) / \rho g . \tag{3.9}$$

### 3.2. Escoamentos (balanceados) em equilíbrio

Embora as equações governantes sejam complexas, os movimentos da escala sinótica são relacionados por balanços aproximados e simples de forças que atuam na atmosfera. Ainda mais, longe de fenômenos localizados da intensa atividade convectiva, os movimentos são muito aproximadamente horizontais. O tratamento destes balanços pode ser simplificado ainda com uso das coordenadas naturais em duas dimensões.

Considerando movimentos em duas dimensões, definiremos os seguintes versores:

- t** = vetor unitário na direção do movimento,  $t$
- n** = vetor unitário para esquerda do movimento na direção  $n$ ,  $e$
- k** = vetor unitário para cima na direção  $z$

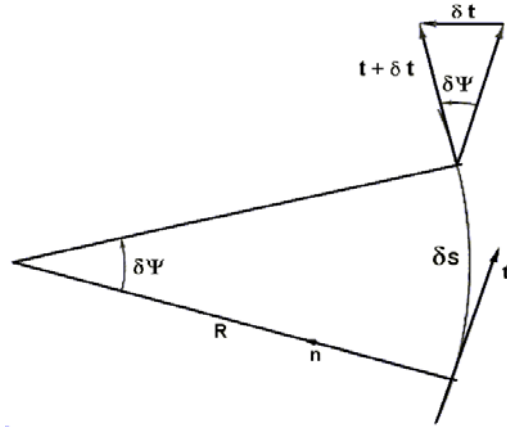
Nessas coordenadas

$$\mathbf{V} = V\mathbf{t}, \text{ onde } V = |\mathbf{V}| \text{ é dada por } V \equiv Ds / Dt , \tag{3.10}$$

onde  $s(x,y,t)$  é a trajetória da parcela em questão. tem-se , então

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{t} \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\mathbf{t}}{Dt} . \tag{3.11}$$

Para obter a taxa de variação do  $\mathbf{t}$  seguindo a parcela, considere a Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Variação do versor tangencial ao movimento seguindo o próprio movimento.

Tem-se, através da figura

$$\delta\psi = \frac{\delta s}{R} = \frac{|\delta\mathbf{t}|}{|\mathbf{t}|} = |\delta\mathbf{t}|$$

$$\text{ou } \frac{\delta|\mathbf{t}|}{\delta s} = \frac{1}{R}, \tag{3.12}$$

onde  $R$  é raio de curvatura e  $\delta\psi$  é incremento do ângulo correspondente ao incremento da trajetória  $\delta s$ . Para  $R > 0$  a parcela vira para a esquerda e para  $R < 0$  a parcela vira para a direita.

No limite  $\delta s \rightarrow 0$ ,  $\delta\mathbf{t}$  se direciona na direção de  $\mathbf{n}$ , portanto

$$\frac{\delta\mathbf{t}}{\delta s} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad \text{e} \quad \frac{D\mathbf{t}}{Dt} = \frac{\mathbf{n}}{R}V \quad \rightarrow \quad \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{t}\frac{DV}{Dt} + \mathbf{n}\frac{V^2}{R} \tag{3.13}$$

Isto é, a aceleração seguindo o movimento é a soma da taxa de variação de velocidade na direção do movimento e a força centrípeta devido a curvatura. No Hemisfério Sul (HS) a força de Coriolis atua para a esquerda do movimento, portanto em coordenadas naturais

$$-f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -fV\mathbf{n} \tag{3.14}$$

- Gradiente de pressão em coordenadas naturais

$$-\nabla_p\Phi = -\left(\mathbf{t}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \mathbf{n}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) \tag{3.15}$$

Assim, as equações de movimento horizontal em coordenadas naturais do escoamento horizontal são dadas por

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial s}; \quad \frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \tag{3.16}$$

As duas equações expressam os balanços (ou equilíbrios) de forças na direção paralela e na direção perpendicular ao movimento, respectivamente.

Se o movimento (fluxo) é paralelo aos contornos geopotenciais (ou  $\phi = \text{constante}$ ) tem-se

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0 \rightarrow \text{a aceleração da magnitude } \frac{DV}{Dt} \text{ é nula.}$$

Adicionalmente, se  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$  é constante, o raio de curvatura também é constante. Neste caso obtém-se várias categorias de fluxo, dependendo das relativas magnitudes das três forças.

### 3.2.1. Movimento ou (escoamento) geostrófico

Se  $R \rightarrow \pm\infty$ , o escoamento segue linha reta. Nesse caso designamos  $V = V_g$ . Assim ter-se á

$$fV_g = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \tag{3.17}$$

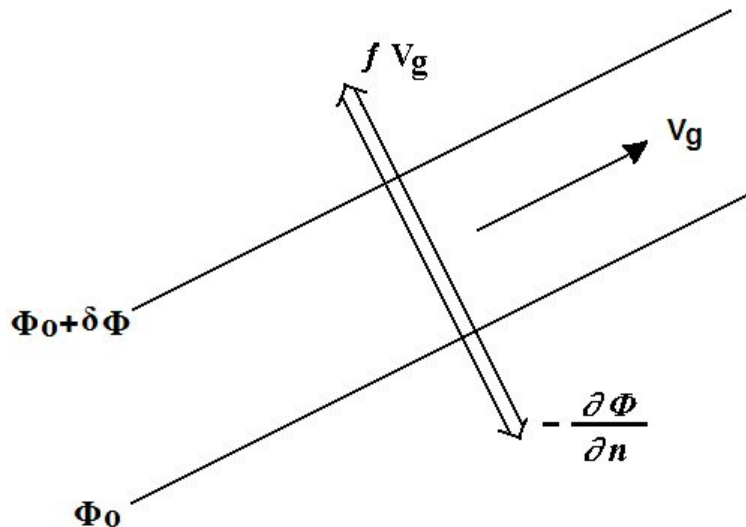


Figura 3.2: Vento geostrófico e o equilíbrio de forças.

Notamos através da figura esquemática acima que a força de Coriolis para a esquerda do movimento e a força de gradiente de pressão para a direita do movimento estão em equilíbrio, e o movimento geostrófico é uniforme e em linha reta.

### 3.2.2. Escoamento inercial

Se o campo geopotencial é uniforme, ou  $\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ , tem-se  $\frac{V^2}{R} = -fV \rightarrow R = -\frac{V}{f}$ , isto é, a velocidade é constante, o que significa que as parcelas do ar seguem trajetórias circulares no sentido anticiclônico. A periodicidade desse movimento, desconsiderando a variação de  $f$  com latitude, é dada por

$$P = \left| \frac{2\pi R}{V} \right| = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{1}{|sen\phi|} \text{ dia} \tag{3.18}$$

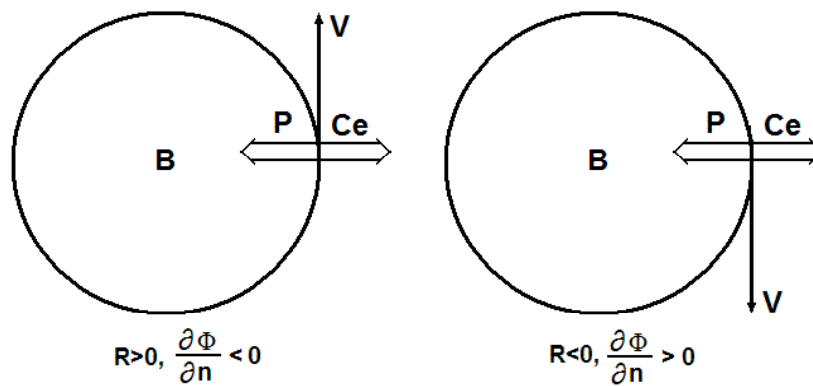
Este é o tempo necessário para o pêndulo de Foucault percorrer 180°.

### 3.2.3. Movimento ou (escoamento) ciclostrófico

Para uma perturbação pequena da parcela do ar, a força de Coriolis é pequena. Ou, para  $R$  pequeno podemos desprezar o termo de  $f$ . Neste caso

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \rightarrow V = \left( -R \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^{1/2} \tag{3.19}$$

Este movimento pode ser tanto ciclônico quanto anticiclônico. Todavia, a força de gradiente de pressão é para o centro e a força centrípeta para fora da trajetória circular da parcela (veja Figura 3.3).



**Figura 3.3:** Movimento ciclostrófico em torno do centro de baixa pressão e equilíbrio de forças.

Este movimento é possível se a força centrífuga é muito maior que a de Coriolis. A razão entre as duas forças é  $V/fR$ , e é equivalente ao número de Rossby.

Este tipo de movimento é observado, por exemplo, nos redemoinhos que freqüentemente ocorrem no verão.

### 3.2.4. Vento gradiente

Na ausência de atrito, o escoamento horizontal, paralelo às isóbaras e sem aceleração ( $DV/Dt = 0$ ) é chamado “escoamento gradiente”. Uma vez que o vento gradiente leva em consideração também a força centrífuga, ele é uma aproximação melhor que o vento geostrófico para representar o vento real. Vento gradiente é dado por

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \left( \frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

Dependendo dos sinais de  $\partial \Phi / \partial n$  e  $R$  (em um dado hemisfério) tem-se várias soluções matemáticas. Algumas delas não representam situações fisicamente possíveis. Um exercício interessante é preparar uma tabela de todas as soluções e suas características para HS. Deve-se lembrar que

$$f < 0 \rightarrow H.S \text{ e } f > 0 \rightarrow H.N$$

A Figura 3.4 abaixo esquematiza os quatro tipos de balanço de forças possíveis e os sentidos dos movimentos gradiente associados para o Hemisfério Sul. Nota-se que em centros de alta pressão  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0$ , e no HS  $R > 0$ , portanto  $R \frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n}$  é limitado tal que

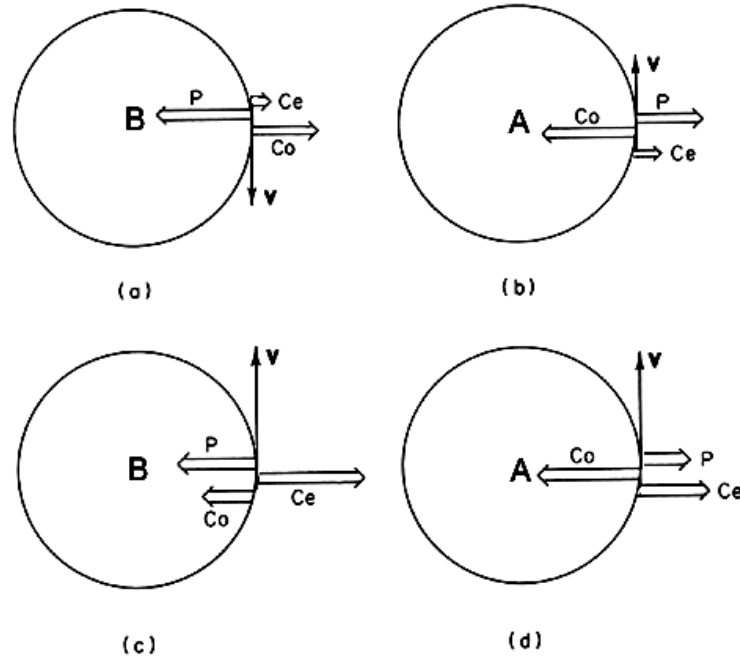
$$\left( \frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) > 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} < \frac{f^2 R}{4} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} \rightarrow 0 \text{ para } R \rightarrow 0$$

Isto é, o campo de pressão no centro de alta pressão se torna achatado (ou *flat*).

Em todos os casos, exceto no centro de baixa pressão anômalo, as forças de gradiente de pressão e de Coriolis são opostas. Este escoamento é chamado “bárico”. O movimento anômalo em torno de baixa pressão é antibárico.





- (a) – centro de baixa pressão regular
- (b) – centro de alta pressão regular
- (c) – centro de baixa pressão anômalo
- (d) – centro de alta pressão anômalo

P → força de pressão;  $C_e$  → força centrífuga;  $C_o$  → força de Coriolis; A → alta pressão; B → baixa pressão;  $V$  → vento

**Figura 3.4:** Vento gradiente e equilíbrio de forças.

Nota-se que  $Rf > 0$  significa escoamento ciclônico em ambos os hemisférios. Podemos escrever a equação do vento gradiente da seguinte forma

$$\frac{V^2}{R} + fV - fV_g = 0, \tag{3.21}$$

onde usamos a definição do vento geotrófico  $V_g$ .

$$\text{Ou, } \frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR}. \tag{3.22}$$

Para escoamento ciclônico normal ( $fR > 0$ )  $V < V_g$ . Ou seja, o vento gradiente é mais fraco que o vento geotrófico. Mas, para anticiclone  $V_g < V$ . Por esta razão, o vento geotrófico é superestimativa do vento real na região de baixa pressão e é subestimativa na região de alta pressão. A diferença, geralmente, entre  $V$  e  $V_g$  é a da ordem de 10 – 20%. Nota-se que  $\frac{V}{fR}$  é o número de Rossby.

Para escoamento anômalo antibárico (em torno de baixa pressão)  $V_g < 0$ . Isto é possível somente para  $V/fR < -1$ , e portanto o escoamento antibárico está associado com  $R$  pequeno, como em um “tornado”.

### 3.3. Trajetória e linha de corrente

Trajétória: é o caminho percorrido por uma parcela durante um período finito de tempo. Se  $s(x, y, t)$  é a trajetória,  $\frac{Ds}{Dt} = V(x, y, t)$  é a velocidade da parcela.

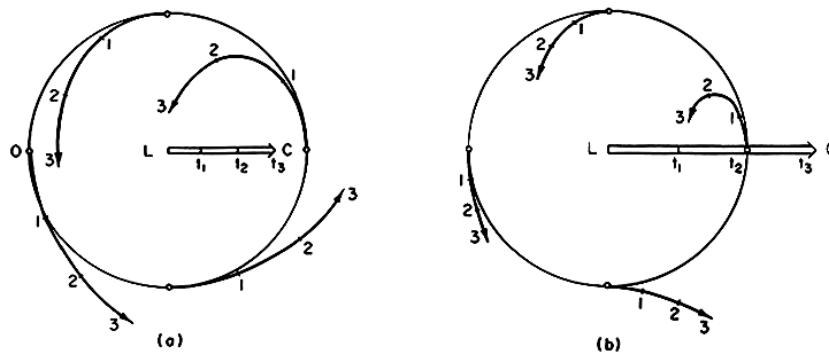
Linha de Corrente: a linha ou curva que está paralela ao vento em todos os seus pontos num dado instante. Uma vez que o vento é tangencial á linha de corrente, ela é determinada por integração da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)} \tag{3.23}$$

onde  $u, v$  são componentes do vento nas direções  $x$  e  $y$ . No estado permanente, i.e., sem mudanças temporais na velocidade do vento, as trajetórias coincidem com as linhas de corrente.

Em geral sistemas sinóticos não são estacionários e deslocam-se com velocidades da ordem de magnitude do vento. Uma relação entre o raio de curvatura das trajetórias ( $R_t$ ) e das linhas de corrente( $R_s$ ) é obtida no livro de Holton (1992) e é dada por:

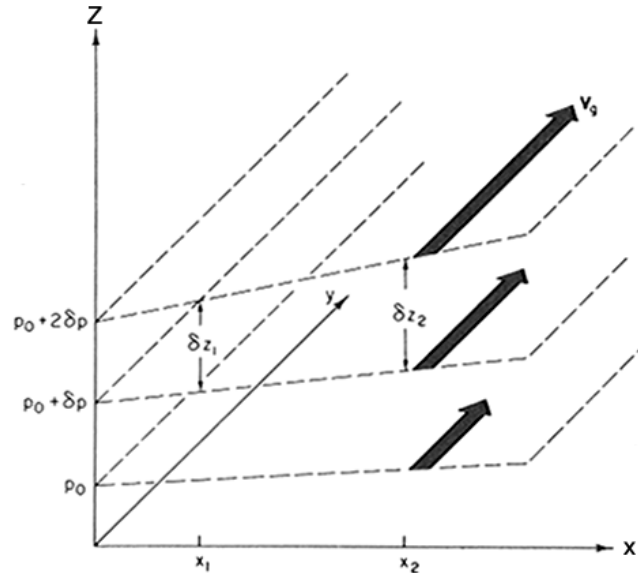
$R_s = R_t \left( 1 - \frac{C \cos \gamma}{V} \right)$  onde  $C$  é a velocidade “constante” de “padrão” do campo de pressão,  $\gamma$  é o ângulo entre as linhas de corrente e a direção do movimento do sistema e  $V$  é vento. A figura abaixo esquematiza as trajetórias das paralelas e as linhas de corrente para anticlones em deslocamento para leste.



**Figura 3.5:** Trajetórias e linhas de correntes em torno de um centro de baixa pressão.  $t_1, t_2, t_3$  são três instantes do tempo.

### 3.4. Vento térmico

Quando a temperatura varia na horizontal, o vento geostrófico varia na vertical (cisalhamento vertical), devido ao equilíbrio hidrostático. Veja a Figura 3.6 que atiza a variação do vento geostrófico com altura no HN.



**Figura 3.6:** Variação do vento geostrófico com altura ou vento térmico.

Imaginamos uma situação em que a temperatura diminui na direção de  $x$  no HS. Isto é a espessura  $\delta z$  diminuindo na direção  $x$ , e a inclinação da superfície isobárica de cima é maior que a inclinação da superfície de baixo. Portanto, gradiente de pressão em altos níveis é maior que em baixos níveis, e o vento geostrófico é maior em altos níveis. Notamos que se  $\nabla T$  aponta para  $-x$ , o vento geostrófico aponta para  $y$  porque  $\nabla p$  em altos níveis aponta para  $+x$  e o sinal do  $f$  é negativo no HS.

Em coordenadas isobáricas tem-se:

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \tag{3.24}$$

O balanço hidrostático é escrito

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p} . \tag{3.25}$$

Tomando derivada com respeito a  $p$  do vento geostrófico e substituindo a equação de hidrostática, obtemos

$$p \frac{\partial v_g}{\partial p} \equiv \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p ; p \frac{\partial u_g}{\partial p} \equiv \frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \tag{3.26}$$

A combinação vetorial das duas equações pode ser escrita

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p T \quad (3.27)$$

Esta é a equação de vento térmico. Podemos inverter a equação para obter o gradiente térmico horizontal em termos da variação vertical do vento geostrófico da seguinte forma

$$\nabla_p T = -\frac{f}{R} \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \ln p}. \quad (3.28)$$

### 3.4.1. Advecção térmica

Agora, integrando a equação do vento térmico entre  $p_0$  e  $p_1$ , tem-se

$$\mathbf{V}_T \equiv \mathbf{V}_g(p_1) - \mathbf{V}_g(p_0) = -\frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} (\mathbf{k} \times \nabla_p T) d \ln p$$

Se  $\langle T \rangle$  é designada a temperatura média da camada ( $p_0 - p_1$ ) pode-se escrever

$$\mathbf{V}_T = -\frac{R}{f} (\mathbf{k} \times \nabla_p \langle T \rangle) \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right), \text{ ou} \quad (3.29)$$

$$u_T = -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right)_p \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (3.30)$$

$$v_T = \frac{R}{f} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \right)_p \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (3.31)$$

Usando a equação hipsométrica do Capítulo 1 tem-se

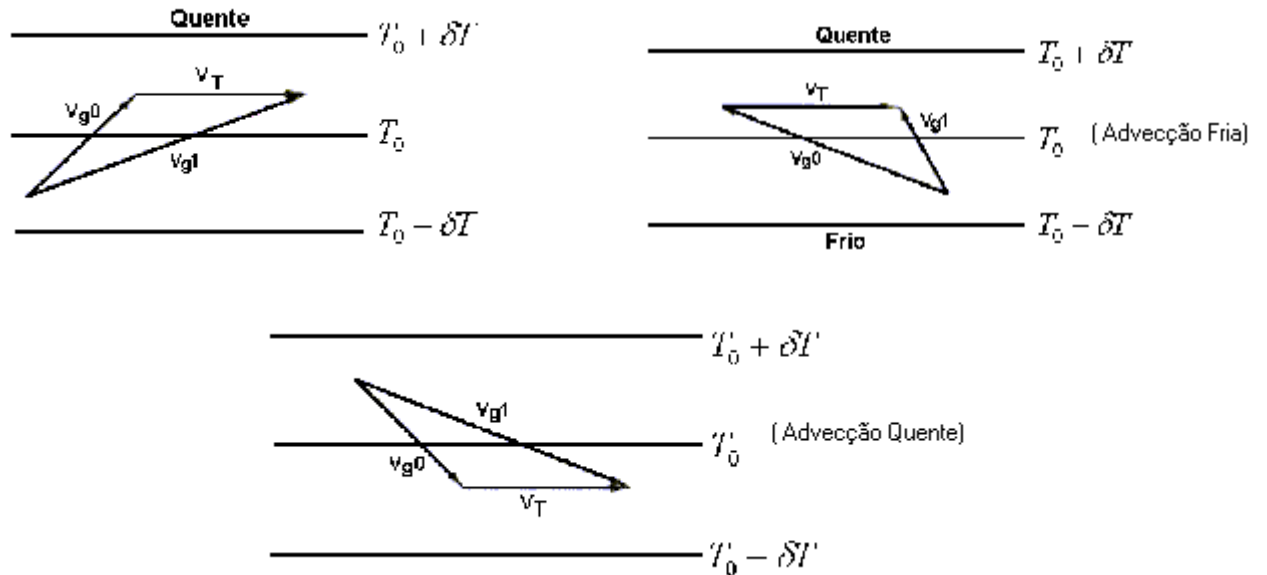
$$u_T = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 - \Phi_0), \quad v_T = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 - \Phi_0) \quad (3.32)$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_0$  são alturas geopotencial das isóbaras  $p_1$  e  $p_0$ , respectivamente.

Lembrando –se que  $\delta \Phi \equiv (\Phi_1 - \Phi_0) = R \langle T \rangle \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right)$  é a espessura da camada entre isóbaras  $p_1$  e  $p_0$ , e é uma função da temperatura média desta camada, podemos escrever, ainda,

$$\mathbf{V}_T = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla(\Phi_1 - \Phi_0). \tag{3.33}$$

Sabemos que isolinhas de espessura e isotermas são sinônimos, portanto podemos dizer que vento térmico “sopra” paralela às isotermas, mantendo temperaturas quentes para sua esquerda no HS. Veja a Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Vento térmico e sua relação com a advecção térmica.

Na Figura 3.7  $\mathbf{V}_{g0}$  e  $\mathbf{V}_{g1}$  são ventos geostroficados nos níveis  $p_0$  e  $p_1$ , respectivamente. Pode-se verificar que giro ciclônico do vento geostrofico com altura significa advecção de ar frio nos ambos hemisférios. Giro anticiclônico do vento geostrofico com altura significa advecção de ar quente. Nas figuras a cima o vento geostrofico médio da camada está direcionada das regiões frias para regiões quentes. Nesta situação a advecção é fria. Enquanto na figura de baixo a advecção é quente.

### 3.4.2. Atmosfera barotrópica

Atmosfera Barotrópica é aquela na qual a densidade depende somente de pressão. Isto é,

$$\rho = \rho(p)$$

Isto significa que numa superfície  $p = \text{constante}$ ,  $T = \text{constante}$  e  $\rho = \text{constante}$ . Ou, superfícies isobáricas numa atmosfera barotrópica são isopícnicas e isotérmicas também. Portanto,

$$\nabla_p T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \ln p} = 0. \quad (3.34)$$

Isto é, vento térmico é nulo, ou variações dos movimentos horizontais (ventos) na vertical são nulas. Portanto, em uma atmosfera barotrópica, centros ciclônicos e anticiclônicos mantém a mesma estrutura em toda sua profundidade, ou seja, a estrutura do escoamento atmosférico é função de apenas  $(x, y, t)$ . Esta é uma restrição forte sobre movimentos atmosféricos da escala sinótica. Todavia, existem situações em que a atmosfera se comporta aproximadamente desta maneira.

Em uma atmosfera “baroclínica”  $\rho = \rho(p, T)$ .

### 3.5. Movimento vertical

A velocidade dos movimentos atmosféricos da escala sinótica é da ordem de  $1 \text{ cm s}^{-1} = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ . As medidas diretas de velocidade de parcelas de ar tem uma acurácia de apenas  $1 \text{ ms}^{-1}$ . Em geral não é possível medir  $w$  (ou  $\omega$ ). Portanto, ela é inferida.

Consideramos a definição da velocidade vertical em coordenadas isobáricas:

$$\omega \equiv \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.35)$$

Substituindo  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_a$ , e lembrando-se que  $|\mathbf{V}_a| \ll |\mathbf{V}_g|$ , tem-se  $\omega = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}_a \cdot \nabla p - g\rho w$ .

$$(3.36)$$

Vamos fazer uma análise de escala desta equação para situações da escala sinótica para obtermos uma ordem de magnitude da  $\omega$  :

$$\frac{\partial p}{\partial t} \sim 1 \text{ kPa} / \text{dia} \text{ que equivale } 10 \text{ mb} / \text{dia}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a \cdot \nabla p &\sim (1 \text{ ms}^{-1})(1 \text{ Pa} / \text{km}) \sim 0,1 \text{ kPa} / \text{dia} \\ g\rho w &\sim 10 \text{ kPa} / \text{dia} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Desprezando termos menores, tem-se  $\omega \approx -g\rho w$ .

Os métodos de calcular  $w$  ou  $\omega$  usam equação de continuidade ou equação termodinâmica. Os métodos serão comentados na aula.

### 3.6. Tendência de pressão em superfície

As tendências de pressão na superfície servem como precursores da aproximação de centros de pressão, que são associados aos sistemas sinóticos que determinam tempo. Consideramos a equação de continuidade.

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla \cdot \mathbf{V}$$

Integrando a equação da superfície (onde a pressão é  $p_s$ ) ao topo da atmosfera (onde a pressão é 0), e lembrando-se que  $\omega(p=0) = 0$ , tem-se:

$$\int_{p_s}^{p=0} \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = - \int_{p_s}^{p=0} (\nabla \cdot \mathbf{V}) dp \tag{3.38}$$

$$\omega(p_s) = - \int_0^{p_s} (\nabla \cdot \mathbf{V}) dp, \text{ ou} \tag{3.39}$$

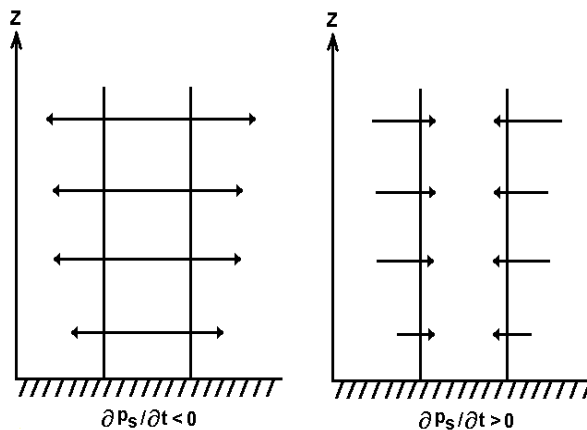
$$\frac{\partial p_s}{\partial t} \approx - \int_0^{p_s} (\nabla \cdot \mathbf{V}) dp, \tag{3.40}$$

onde assumimos que a superfície é horizontal e  $\omega_s = 0$ , e o efeito de advecção é pequena. Isto é, a tendência de pressão em superfície em um dado ponto é determinada pela total convergência de massa na coluna atmosférica acima do ponto. Figura 3.8 esquematiza as situações de queda de pressão e aumento de pressão na superfície.

A equação de tendência apresenta potencial para previsão de tempo. Todavia ela sofre de um defeito grave, porque o cálculo da tendência depende do conhecimento de vento ageostrófico. Além disso, o campo de divergência apresenta valores negativos em baixos níveis e positivos em altos níveis (ou vice versa), assim, o integral é um resíduo entre valores compensadores. Logo, a estimativa da divergência integrada na vertical apresenta grandes erros, até do próprio sinal.

Em coordenadas  $(x, y, p, t)$  a equação de tendência, expressa nos termos da evolução de  $\Phi$  na superfície, é dada por:

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \cong - \frac{RT_s}{p_s} \int_0^{p_s} (\nabla \cdot \mathbf{V}) dp.$$



**Figura 3.8:** Relação entre a divergência média da coluna atmosférica e a tendência de pressão na superfície.

### **3.7. Circulações verticais devido ao aquecimento**

Uma discussão quantitativa das circulações no plano vertical em um local de aquecimento é feita usando a equação de tendência e a equação hipsométrica do livro de Holton, e são discutidas na aula. Uma fonte de aquecimento na média troposfera gera um centro de alta pressão na camada superior e um centro de baixa pressão na camada inferior da troposfera. Isso se deve a aumento de espessura na região de aquecimento em relação as regiões vizinhas laterais. A circulação associada apresenta convergência em baixo níveis, movimentos verticais ascendentes e divergência em altos níveis.



# Capítulo 4

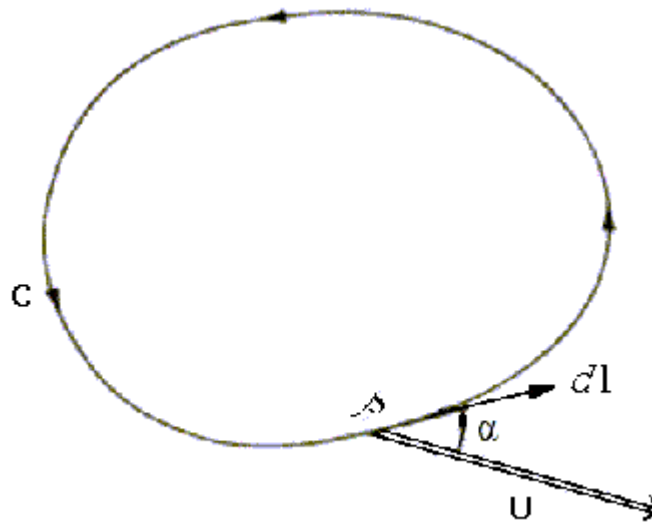
## 4.1. Circulação e vorticidade

Rotação em um meio contínuo é muito sutil em comparação com rotação de um objeto sólido. Circulação e vorticidade são as medidas de rotação. Circulação é macroscópica (e é escalar) e vorticidade é microscópica (e é vetor). Circulação em volta de um circuito fechado em um fluido é definida como a integral de linha fechada do componente de velocidade tangencial ao circuito:

$$C \equiv \oint \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \oint |\mathbf{U}| \cos \alpha \, dl \tag{4.1}$$

$$C \equiv \oint \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} =$$

onde  $\mathbf{l}(s)$  é o vetor de posição estendendo-se da origem ao ponto  $s(x, y, z)$  sobre o contorno  $C$ . Nota-se que estamos usando a mesma notação  $C$  para o contorno e para a circulação também.  $d\mathbf{l}$  representa o limite de  $\delta\mathbf{l} = \mathbf{l}(s + \delta s) - \mathbf{l}(s)$  em  $\delta s \rightarrow 0$ .  $d\mathbf{l}$  é tangencial a curva  $C$ .  $\alpha$  é o ângulo entre o vetor vento  $\mathbf{U}$  e  $d\mathbf{l}$ . Circulação  $C$  é considerada positiva para integração no sentido anti-horário. Veja a Figura 4.1.



**Figura 4.1:** Circuito anti-horário fechado.  $s$  é a distância ao longo do circuito.  $\mathbf{U}$  é vetor velocidade.  $d\mathbf{l}$  é versor tangencial ao circuito no ponto  $s$ .

Em caso de rotação de um corpo sólido com velocidade angular  $\Omega$  a circulação é dada por  $2\Omega\pi R^2$ , onde  $R$  é a distância do anel circular do eixo de rotação, e  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ .

## 4.2. Teorema de circulação

Desconsiderando as forças de atrito a equação do movimento (2ª lei de Newton) é

$$\frac{Da\mathbf{U}_a}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi \quad (4.2)$$

Obtendo-se a integral de linha fechada sobre um circuito de partículas de fluido tem-se :

$$\oint \frac{Da\mathbf{U}_a}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = -\oint \frac{\nabla p \cdot d\mathbf{l}}{\rho} - \oint \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} \quad (4.3)$$

$$\text{Analisando lado esquerdo tem-se: } \frac{Da\mathbf{U}_a}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{l}) - \mathbf{U}_a \cdot \frac{D}{Dt}(d\mathbf{l}) \quad (4.4)$$

$$\text{Mas } \frac{D}{Dt}d\mathbf{l} = d\mathbf{U}_a \quad \text{portanto} \quad \frac{Da\mathbf{U}_a}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{l}) - \mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{U}_a \quad (4.5)$$

$$\text{Analisando lado direito tem-se: } \oint \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\Phi = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{Também, tem-se } \oint \mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{U}_a = \frac{1}{2} \oint d(\mathbf{U}_a \cdot \mathbf{U}_a) = 0 \quad (4.7)$$

Assim tem-se o teorema de circulação:

$$\frac{DC_a}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{U}_a \cdot d\mathbf{l} = -\oint \rho^{-1} dp \quad (4.8)$$

O termo do lado direito é chamado termo “solenoidal”. O lado esquerdo é a taxa de variação da circulação seguindo o escoamento.

### 4.2.1. Fluido barotrópico

Para um fluido barotrópico  $\rho$  é função de  $p$  e então

$$\oint \frac{dp}{\rho} = \oint dF(p) = 0, \quad (4.9)$$

onde  $F(p)$  é alguma função somente da pressão. Isto significa que para um fluido barotrópico a circulação absoluta é conservada, ou

$$\frac{DC_a}{Dt} = 0. \quad (4.10)$$

Este é o teorema de circulação de Kelvin.

### 4.3. Circulação relativa a Terra

É conveniente trabalhar com circulação relativa à Terra,  $C$ .

$C_a = C + C_e$  onde  $C_e$  é a circulação devido à rotação da Terra, e é dada por,

$$C_e = \oint \mathbf{U}_e \cdot d\mathbf{l} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{U}_e) \cdot \mathbf{n} dA, \text{ pelo teorema de Stokes} \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{U}_e = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  é a velocidade devido a rotação da Terra em uma distância  $\mathbf{r}$  do eixo,  $A$  é área circundada pelo circuito,  $\mathbf{n}$  é vetor unitário perpendicular a área definida pela regra do “parafuso da mão direita.”

$$\nabla \times \mathbf{U}_e = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{R} = 2\boldsymbol{\Omega} \quad (4.12)$$

$$(\nabla \times \mathbf{U}_e) \cdot \mathbf{n} = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \equiv f. \quad (4.13)$$

Portanto, circulação no plano horizontal devido a rotação da Terra é:

$$C_e = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} A = 2\boldsymbol{\Omega} A \sin \phi, \quad (4.14)$$

onde  $A_e$  é a projeção da área  $A$  no plano equatorial dada por  $A_e = A \sin \phi$ , onde  $\phi$  é latitude. Portanto

$$C = C_a - 2\boldsymbol{\Omega} A_e, \text{ e} \quad (4.15)$$

$$\frac{DC}{Dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \frac{DA_e}{Dt} \quad (4.16)$$

#### 4.3.1. Fluido barotrópico

Para fluido barotrópico

$$\frac{DC}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \frac{DA_e}{Dt} \quad (4.17)$$

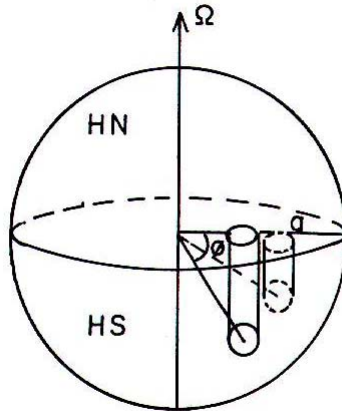
Integrando, seguindo o movimento do circuito, de estado inicial (designado pelo sufixo 1) a estado final (designado pelo sufixo 2) tem-se:

$$C_2 - C_1 = -2\boldsymbol{\Omega} (A_2 \sin \phi_2 - A_1 \sin \phi_1) \quad (4.18)$$

A equação significa que, em um fluido barotrópico, a circulação relativa de um circuito varia por duas razões:

- 1) Variação da área do circuito

2) Mudança da latitude (ver Figura 4.2).



**Figura 4.2:** Efeito da variação de latitude e área do circuito sobre a circulação.

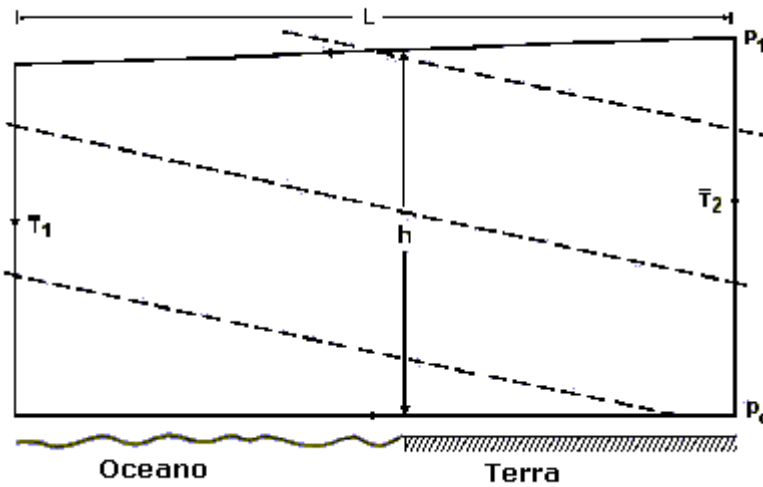
### 4.3.2. Fluido baroclínico

Em um fluido baroclínico, a circulação pode ser gerada pelo termo “solenoidal” ou seja, quando as superfícies de pressão constante e densidade constante intersectam.

$$\frac{DC_a}{Dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} = -\oint RTd \ln p \tag{4.19}$$

Um exemplo clássico de geração da circulação é a brisa marítima. Em uma tarde de verão, a temperatura sobre o oceano é menor que sobre a Terra. Se a pressão é uniforme no nível de superfície, as superfícies isobáricas em altitude inclinam-se (no plano vertical) da Terra para o oceano, e as superfícies de densidade constante inclinam-se do oceano para a Terra. Assim, as superfícies de pressão e de densidade intersectam formando “solenóides” conforme mostrado na Figura 4.3.

Integrando a equação acima, tomando temperaturas médias das colunas atmosféricas sobre a Terra e oceano como  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, tem-se :



**Figura 4.3:** Efeito solenoidal para a geração de brisa marítima ou terrestre.

$$\frac{DC_a}{Dt} = R \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)(T_2 - T_1) > 0 \tag{4.20}$$

Designando a velocidade tangencial média ao longo do circuito como  $\langle v \rangle$ , a circulação é dada por  $C_a = 2(h + L)\langle v \rangle$ , e (4.21)

$$\frac{D\langle v \rangle}{Dt} = \frac{R \ln(p_0 / p_1)}{2(h + L)}(T_2 - T_1) \tag{4.22}$$

Substituindo os valores típicos observados na atmosfera real na camada próxima a superfície, na Equação 4.22 tem-se :

$$p_0 = 1000 \text{ hPa}, \quad p_1 = 900 \text{ hPa}$$

$$T_2 - T_1 = 10^\circ \text{C}, \quad L = 20 \text{ km}, \quad h = 1 \text{ km}$$

$$\frac{D\langle v \rangle}{Dt} \cong 7 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2}.$$

Desconsiderando as forças de atrito, o vento chegaria a um valor de  $25 \text{ ms}^{-1}$  em 1 hora. Na realidade a força de atrito reduz a aceleração, a circulação reduz a diferença de temperatura e a circulação atinge um estado de equilíbrio com ventos em torno de  $15$  a  $20 \text{ ms}^{-1}$ .

#### 4.4. Vorticidade

Vorticidade é rotacional do vetor de movimento do fluido:

$$\omega_a \equiv \nabla \times \mathbf{U}_a, \quad \omega \equiv \nabla \times \mathbf{U} \quad (4.23)$$

$$\omega = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.24)$$

O componente vertical da vorticidade é o mais importante para os movimentos sinóticos, e ele é dado por

$$\zeta \equiv \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.25)$$

$\zeta > 0 \rightarrow$  ciclone no Hemisfério Sul (HN)

$\zeta < 0 \rightarrow$  ciclone no Hemisfério Sul (HS)

O componente vertical da vorticidade absoluta é dada por

$$\eta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}_a) = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) + \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}_e) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{U}_e = 2\Omega \sin\phi \equiv f \text{ é a vorticidade planetária. Portanto} \quad (4.27)$$

$$\eta = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \text{ é a vorticidade absoluta.} \quad (4.28)$$

A circulação em volta de um circuito em relação a área do circuito é o componente da vorticidade média perpendicular a área, isto é,

$$\zeta_m \equiv (\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}) A^{-1} \quad (4.29)$$

onde  $A$  é a área do circuito,  $\zeta_m$  é a vorticidade média da área.

Assim, o componente vertical da vorticidade é definida como a circulação em torno de um circuito no plano horizontal dividida pela área do circuito no limite em que a área tende a zero.

$$\zeta \equiv \lim_{A \rightarrow 0} (\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}) / A \quad (4.30)$$

Para vermos a relação entre circulação e vorticidade consideramos um circuito infinitesimal retangular mostrado na Figura 4.4.

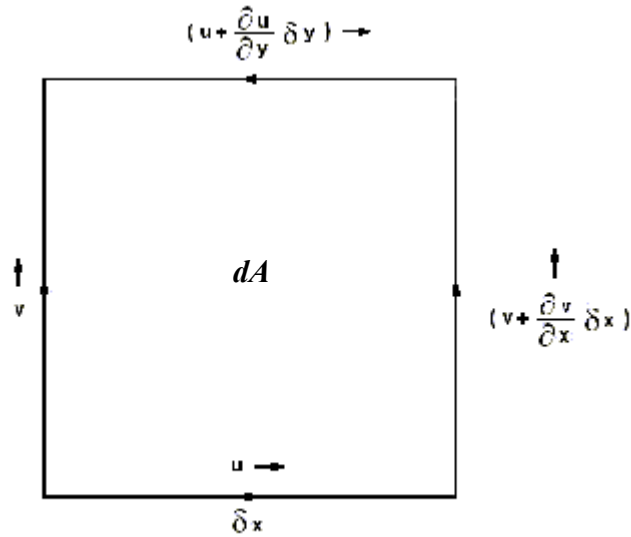


Figura 4.4: Um circuito anti-horário retangular.

$$\delta C = u\delta x + \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \right) \delta y - \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \right) \delta x - v\delta y \tag{4.31}$$

$$\delta C = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \delta y \tag{4.32}$$

$$\frac{\delta C}{\delta A} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \zeta \tag{4.33}$$

Em termos gerais

$$C = \oint \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, dA \tag{4.34}$$

Onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário perpendicular ao elemento da área  $dA$  positivo no “sentido do polegar da mão direita”.

#### 4.4.1. Vorticidade em coordenadas naturais

Considere um circuito conforme a Figura 4.5. A circulação em torno desse circuito é:

$$\delta C = V[\delta s + d(\delta s)] - \left( V \frac{\partial V}{\partial n} \delta n \right) \delta s \tag{4.35}$$

Mas,  $d(\delta s) = \delta\beta \delta n$  onde,  $\delta\beta$  é a mudança na direção do vento em uma distância  $\delta s$ .

Portanto

$$\delta C = \left( -\frac{\partial V}{\partial n} + V \frac{\delta\beta}{\delta s} \right) \delta n \delta s \tag{4.36}$$

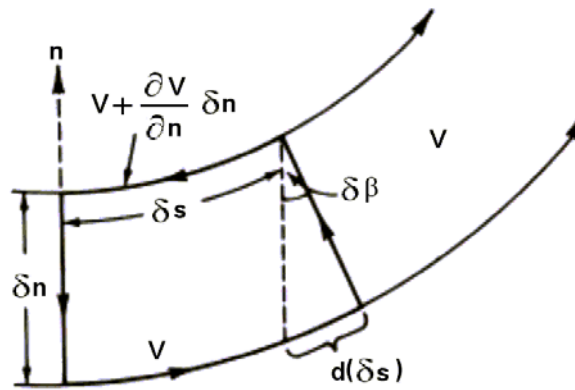
Isto nos dá

$$\zeta = \lim_{\delta n, \delta s \rightarrow 0} \frac{\delta C}{(\delta n \delta s)} = -\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R_s} \tag{4.37}$$

onde  $R_s$  é o raio de curvatura das linhas de corrente ou

$$\zeta = -\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R_s} \tag{4.38}$$

O primeiro termo do lado direito é a vorticidade de cisalhamento e segundo termo é a vorticidade de curvatura do escoamento.



**Figura 4.5:** Avaliação da vorticidade em coordenadas naturais.

É interessante notar que escoamentos em linha reta, podem apresentar vorticidade. Escoamento curvilíneo pode não ter vorticidade! Os dois exemplos estão mostrados no texto do Holton.



#### 4.5. Vorticidade potencial

A definição da temperatura potencial,  $\theta = T(p_s / p)^{R/c_p}$  nos dá

$$\rho = p^{C_v/c_p} (R\theta)^{-1} (p_s)^{R/c_p}. \quad (4.39)$$

Portanto, sobre uma superfície isentrópica ( $\theta = \text{const.}$ ) a densidade é função apenas de  $p$ . Assim, o termo solenoidal  $\oint \frac{dp}{\rho} = 0$  sobre uma superfície  $\theta = \text{constante}$ . Isto é, para escoamentos adiabáticos, a circulação computada em volta de um circuito de partículas de fluido sobre uma superfície  $\theta = \text{constante}$  reduz-se para a mesma situação de um fluido barotrópico. Ou seja:

$$\frac{D}{Dt}(C + 2\Omega \delta A \text{sen}\phi) = 0 \quad (4.40)$$

onde  $\delta A$  é a área de um circuito infinitesimal. Isto é,  $\delta A(\zeta_0 + f) = \text{constante}$  onde  $\zeta_0$  é a componente vertical da vorticidade relativa avaliada sobre uma superfície isentrópica e  $f = 2\Omega \text{sen}\phi$ . Aqui, suponha-se que as superfícies isentrópicas são quase horizontais.

Se a parcela do ar está compreendida entre duas superfícies isentrópicas  $\theta_0$  e  $\theta_0 + \delta\theta$  que são separadas por  $-\delta p$ , então a massa da parcela  $\delta M = (-\delta p / g)\delta A$  é conservada seguindo o escoamento. Portanto,

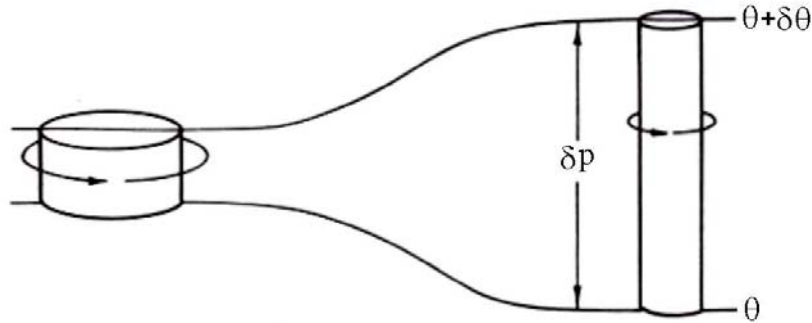
$$\delta A = -\frac{\delta M g}{\delta p} = \left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right) \left(\frac{\delta M g}{\delta\theta}\right) = \text{constante} \left(-\frac{\delta\theta}{\delta p}\right) \quad (4.41)$$

porque  $\left(\frac{\delta M}{\delta\theta}\right)$  é constante. Finalmente podemos escrever

$$P \equiv (\zeta_0 + f) \left(-g \frac{\partial\theta}{\partial p}\right) = \text{constante}. \quad (4.42)$$

$P$  é a forma da “vorticidade potencial de Ertel” em coordenadas isentrópicas. Ela é definida com o sinal negativo para dar valores negativos no HS e valores positivos no HN em condições normais.

A equação diz que em escoamentos sem atrito e adiabáticos  $P$  é conservada. A vorticidade potencial é uma medida da razão entre a vorticidade e a profundidade efetiva do vórtice.



**Figura 4.6:** Conservação de vorticidade potencial para movimentos adiabáticos.

Para um fluido homogêneo ( $\rho = \text{constante}$ ) e incompressível ( $d\rho/dt=0$ ), a área horizontal da parcela deve ser inversamente proporcional a profundidade ou  $\delta A = M(\rho\delta z)^{-1} = \text{constante}/\delta z$ .

Portanto a conservação da vorticidade potencial traduz-se em:

$$(\zeta + f)/\delta z = \text{constante}, \tag{4.43}$$

onde  $\zeta$  é avaliada na superfície horizontal.

#### 4.5.1. Escoamento sobre cordilheiras

Consideremos um escoamento zonal sobre cordilheira conforme Figura 4.7. Notamos que a razão da variação da temperatura potencial na vertical ( $\partial\theta/\partial p$ ), muda substancialmente ao longo da trajetória das parcelas.

- a. Em um caso simples de  $(\partial\theta/\partial p) = \text{constante}$

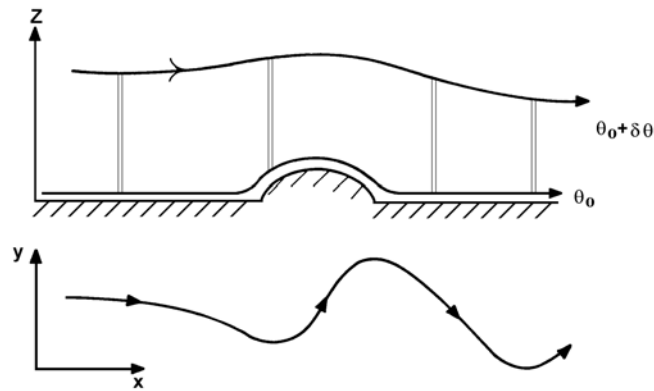
A equação da conservação da vorticidade potencial simplifica para  $\eta = \zeta + f = \text{constante}$ .

Isto é, a soma  $\zeta + f$  permanece constante seguindo o escoamento. Seja  $\eta(x_0, y_0) = f_0$ . De acordo com a equação acima, em todos os pontos da trajetória que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  deve-se satisfazer:

$$\zeta + f = f_0, \text{ isto é } \zeta = f_0 - f \tag{4.44}$$

Para trajetórias que projetam-se (ou curvam-se) para norte, a vorticidade relativa deve tornar-se negativa, ou  $\zeta < 0$ . Isto é, a parcele adquire vorticidade ciclônica, no HS. Para as trajetórias que projetam-se (ou curvam-se) para o sul acontece o contrário.

Isto tem as seguintes implicações: escoamento zonal de oeste permanece zonal. Todavia, escoamento de leste pode adquirir curvatura ciclônica ou anticiclônica, ainda conservando a vorticidade absoluta.



**Figura 4.7:** Escoamento zonal sobre uma cordilheira gera ondas do lado sotavento.

b. Em caso de  $(\partial\theta/\partial p)$  variável

Consideremos, agora, um escoamento zonal de oeste longe da montanha onde  $\zeta = 0$ . Se o escoamento é adiabático a coluna atmosférica entre  $\theta_0$  e  $\theta_0 + \delta\theta_0$  sempre permanece entre as duas isentrópicas.

Observa-se um esticamento da coluna antes de se aproximar da montanha. Isto é  $(-\partial\theta/\partial p)$  decresce (diminui) e portanto  $|(\zeta_0 + f)|$  aumenta. Uma vez que  $f$  na reta zonal é constante,  $|\zeta_0|$  aumenta ou torna-se negativa no HS, (porque  $f < 0$  no HS). O escoamento adquire vorticidade ciclônica (pequena) antes de atingir a (oeste da) montanha. Neste caso  $|f|$  aumenta e diminui a necessidade de tornar-se ciclônica. A medida que a coluna chega ao topo da montanha  $(-\partial\theta/\partial p)$  aumenta. Isto é, pela mesma lógica anterior  $\zeta$  torna-se anticiclônica e desloca-se para o equador. Quando a coluna atinge a sua profundidade normal, ao lado leste da montanha, ela se encontra na latitude relativamente baixa, e portanto a vorticidade relativa precisa tornar-se ciclônica. Assim a trajetória precisa ter curvatura ciclônica e a coluna será defletida para o pólo. Quando a coluna volta para a latitude original, ela ainda apresenta um componente do movimento para pólo. Ao lado do pólo desta latitude a coluna adquire curvatura anticiclônica, revertendo a sua direção. Depois, a coluna (parcela) segue uma trajetória ondulatória no plano horizontal. Portanto, escoamento permanente de oeste sobre uma barreira de montanhas (como os Andes) resulta em um padrão ciclônico imediatamente a leste da barreira, e um movimento ondulatório de cavados e cristas a leste.

A situação no caso de escoamento de leste sobre barreiras é diferente. Neste caso não formam ondas estacionárias. O livro de Holton explica porque.

Nota-se que, na equação da conservação de vorticidade potencial, a variação da profundidade do fluido tem um efeito similar da variação do parâmetro de Coriolis.

#### 4.6. Equação da vorticidade

Tomaremos derivadas das equações de movimento da seguinte maneira

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right). \quad (4.46)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e notando que  $(\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{df}{dy} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Nota-se que  $Df / Dt = v (df / dy)$ . Assim tem-se

$$\frac{D}{Dt} (\zeta + f) = -(\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.48)$$

A equação mostra que a vorticidade absoluta varia devido a três efeitos:

- i) efeito de divergência;
- ii) efeito “tilting”;
- iii) efeito solenoidal.

Os três termos acima listados podem ser interpretados da seguinte maneira:

- i) efeito de bailarina;
- ii) geração da vorticidade vertical pela inclinação do eixo dos vórtices horizontais;
- iii) efeito solenoidal explicado da mesma maneira que foi feita na equação de circulação.

A equivalência entre  $-\oint \alpha dp$  e  $-\mathbf{k} \cdot (\nabla \alpha \cdot \nabla p) = -\left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$  está demonstrada

no livro de Holton.

#### 4.6.1. Equação da vorticidade em coordenadas isobáricas

Aplicando o operador  $(\mathbf{k} \cdot \nabla \times)$  para a equação de movimento horizontal e notando que

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \left( \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) + \zeta \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \quad (4.49)$$

e usando a seguinte equivalência vetorial

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (4.50)$$

tem-se

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \times \nabla \omega \right) \quad (4.51)$$

Notas-se que o termo solenoidal não aparece na equação da vorticidade em coordenadas isobáricas. Um pouco adiante veremos que esse termo é realmente pequeno para movimentos sinóticos e portanto pode ser desprezado.

#### 4.6.2. Análise de escala de equação de vorticidade

Para sistemas sinóticos das latitudes médias tem-se seguintes escalas típicas:

Velocidade Horizontal	$U \sim 10 \text{ms}^{-1}$
Velocidade Vertical	$W \sim 1 \text{cms}^{-1}$
Escala Horizontal	$L \sim 10^6 \text{m}$
Profundidade	$H \sim 10^4 \text{m}$
Variação horizontal da pressão	$\delta p \sim 1 \text{kPa}$
Densidade média	$\rho \sim 1 \text{kgm}^{-3}$
Variação fracional da densidade	$\delta \rho / \rho \sim 10^{-2}$
Escala temporal (advectiva)	$L/U \sim 10^5 \text{s}$
Parâmetro de Coriolis	$f_0 \sim 10^{-4} \text{s}^{-1}$
Variação do $f$	$\beta \sim 10^{-11} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$

Substituição destes valores dá estimativas da ordem de magnitude dos termos da equação de vorticidade.

$$\zeta \sim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{s}^{-1}; D = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-6} \text{s}^{-1}. \quad (4.52)$$

Com isto podemos estimar as ordens de magnitude dos termos da equação de vorticidade da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}, u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} s^{-2}$$

$$w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11} s^{-2}$$

$$v \frac{df}{dy} \sim U\beta \sim 10^{-10} s^{-2}$$

$$f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \lesssim \frac{f_0 U}{L} \sim 10^{-9} s^{-2}$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lesssim \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11} s^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \lesssim \frac{\delta \rho \delta p}{\rho^2 L^2} \sim 10^{-11} s^{-2}$$

Nota-se que

$$\left| \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \zeta \right| \lesssim Ro; \quad \left( \zeta / f_0 \right) \sim R \quad e$$

$$\left| \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \zeta \right| \lesssim Ro^2$$

Retendo apenas termos da ordem  $10^{-10} s^{-2}$  tem-se :

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = -f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \text{onde} \quad (4.53)$$

$$\frac{D_h}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.54)$$

O significado da equação é a variação da vorticidade absoluta, seguindo o movimento horizontal em sistemas sinóticos, é dada pela geração da vorticidade devido ao campo de convergência. Esta aproximação não é válida nas proximidades de “frentes” onde

$$w \sim 10 \text{ cms}^{-1} \text{ e } L \sim 10^5 \text{ m}$$

### 4.6.3. Equação de vorticidade potencial barotrópica

Permitindo a manutenção do termo  $\zeta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  na equação de vorticidade tem-se

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = -(\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.55)$$

Se o fluido é homogêneo e incompressível, tem-se pela equação de continuidade,  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.56)$$

Portanto tem-se neste caso

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = (\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.57)$$

Sabemos que para fluido barotrópico, o movimento horizontal (vento) geostrófico não varia com a altura. Assumindo que  $\zeta = \zeta_g$  podemos integrar a equação de  $z = z_1$  a  $z = z_2$  para obter:

$$h \frac{D_h(\zeta_g + f)}{Dt} = (\zeta_g + f) [w(z_2) - w(z_1)] \text{ onde } h = z_2 - z_1$$

Devemos lembrar agora que  $w = Dz / Dt$ .

Considerando  $z_1 = 0$  e  $z_2 = h(x, y)$  tem-se ,

$$w_2 = Dh / Dt \text{ e } w_1 = \frac{Dz_1}{Dt} = 0$$

Agora podemos escrever a equação de vorticidade

$$\frac{1}{\zeta_g + f} \frac{D_h(\zeta_g + f)}{Dt} = \frac{1}{h} \frac{D_h h}{Dt} \quad (4.58)$$

a qual simplifica-se para

$$\frac{D_h \ln(\zeta_g + f)}{Dt} = \frac{D_h \ln h}{Dt} \rightarrow \frac{D}{Dt} \ln \left( \frac{\zeta_g + f}{h} \right) = 0 \quad (4.59)$$

Ainda simplifica-se para

$$\frac{D_h}{Dt} \left( \frac{\zeta g + f}{h} \right) = 0. \quad (4.60)$$

Esta é a equação de vorticidade potencial barotrópica. Em caso de fluxo puramente horizontal tem-se  $w = 0$  e a equação simplifica-se para

$$\frac{D_h}{Dt} (\zeta g + f) = 0. \quad (4.61)$$



# Capítulo 5

## 5.1. Camada limite planetária

A camada limite planetária é a parte da atmosfera fortemente influenciada pelas interações entre a atmosfera e a superfície abaixo. A subcamada viscosa, bem rente à superfície terrestre, é a camada onde a difusão molecular é importante, e o cisalhamento vertical do vento é muito grande. Esta camada possui uma profundidade de alguns mm ou  $10^{-3}$  m.

Grande cisalhamento gera turbulência. Na camada viscosa os turbilhões são de tamanho muito pequeno ( $10^{-4}$  m). Turbilhões, juntamente com o aquecimento da superfície, são eficientes para transportar quantidade de movimento para a superfície e calor para a atmosfera. Devemos reconhecer que turbilhões são mais eficientes que difusão molecular no transporte de propriedades do fluido. A profundidade da camada atmosférica afetada pelas turbilhões varia com as condições de estabilidade estática. Ela varia de 30 m em condições estáveis a 3 km em condições convectivas ou instáveis. Esta camada é a camada limite planetária. Para representar a dinâmica desta camada nós devemos incluir adequadamente os efeitos da turbulência.

Turbulência é definida como “movimento irregular” das parcelas do ar nas escalas temporais e espaciais de todo o espectro entre  $10^{-3}$  m a  $10^3$  m. Algumas escalas de movimento não são tratadas explicitamente por razões de limitações de observações. Turbilhões grandes, que contém a parte substancial de energia, são descritos pela rede de observações sinóticas. Todavia, os turbilhões não resolvidos pela rede de observações tornam-se importantes na camada limite.

O tratamento detalhado e completo desse assunto é volumoso e requer muito tempo. Disciplinas específicas como Micrometeorologia e Camada Limite tratam do assunto elaboradamente. Todavia, um apanhado rudimentar do assunto será apresentado nesta apostila.

## 5.2. Aproximação Boussinesq

Reconhecendo que a densidade atmosférica do estado básico varia de  $\sim 10\%$  na camada de primeiros 1000 m e a parte variável da densidade (em um dado nível horizontal) é apenas 1 ou 2% da densidade do estado básico, a dinâmica da camada limite pode ser modelada como fluido homogêneo e incompressível. Todavia, não podemos totalmente ignorar as variações da densidade, pois são necessárias para representar a força de flutuabilidade (“buoyancy”).

Na aproximação Boussinesq a variável densidade é substituída por um valor constante em todos os termos das equações, exceto no termo de força de flutuação (ou quando a densidade está associada com a gravidade). Nestas condições, as equações de movimento horizontal podem ser expressas da seguinte forma:

$$Du/Dt = - (1/\rho_0)(\partial p/\partial x) + fv + F_{rx}, \text{ e} \quad (5.1)$$

$$Dv/Dt = - (1/\rho_0)(\partial p/\partial y) - fu + F_{ry}. \quad (5.2)$$

A equação de movimento vertical pode ser escrita

$$Dw/Dt = - (1/\rho_0)(\partial p/\partial z) + g(\theta / \theta_0) + F_{rz}. \quad (5.3)$$

Nestas equações  $\theta$  é desvio da temperatura potencial a partir do seu valor do estado básico,  $\theta_0(z)$ , e  $p$  é desvio da pressão a partir do seu valor do estado básico  $p_0(z)$ . Lembra-se que  $F_{rx}$ ,  $F_{ry}$  e  $F_{rz}$  são forças de atrito devido a viscosidade molecular.

As equações da energia termodinâmica no caso adiabático e da continuidade são escritas da seguinte maneira.

$$D\theta = Dt = - w (d\theta / dz) \quad (5.4)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad (5.5)$$

### 5.3. Média de Reynold

Em um fluido turbulento  $u, v, w, T, p, \theta$ , etc. variam muito rapidamente. Para que as medições destas variáveis representem o escoamento de larga escala, devemos obter uma média sobre um intervalo de tempo. Este intervalo deve ser suficientemente grande para conter vários turbilhões e suficientemente pequeno para obter as tendências dos movimentos de larga escala. Para tanto considera-se que

$$w = \bar{w} + w' ; \theta = \bar{\theta} + \theta' ; \text{ etc.} \quad (5.6)$$

onde  $\bar{w}, \bar{\theta}$  etc. são as médias sobre o intervalo de tempo considerado.  $w', \theta'$ , etc. são os desvios instantâneos. Assim, por definição

$$\bar{w}' = \bar{\theta}' = 0. \quad (5.7)$$

Também nota-se que

$$\overline{w\theta} = \overline{(\bar{w} + w')(\bar{\theta} + \theta')} = \bar{w}\bar{\theta} + \overline{w'\theta'}$$

O termo  $\overline{w'\theta'}$  é a covariância entre  $w$  e  $\theta$  naquele intervalo.

Agora aplicando o operador  $\bar{()}$  para a primeira equação da seção 5.2 e desprezando o termo de atrito tem-se

$$\begin{aligned}
 \overline{Du} / Dt &= - (1/\rho_0) ( \partial \overline{p} / \partial x ) + f \overline{v} + \overline{F_{rx}} \\
 \partial \overline{u} / \partial t + \overline{u}(\partial \overline{u} / \partial x) + \overline{v}(\partial \overline{u} / \partial y) + \overline{w}(\partial \overline{u} / \partial z) &= \\
 &= - 1/\rho_0 ( \partial \overline{p} / \partial x ) + f \overline{v} - \overline{u'(\partial u' / \partial x)} - \overline{v'(\partial u' / \partial y)} - \overline{w'(\partial u' / \partial z)} \\
 &= - 1/\rho_0 ( \partial \overline{p} / \partial x ) + f \overline{v} - (\partial / \partial x)(\overline{u'u'}) - (\partial / \partial y)(\overline{u'v'}) - (\partial / \partial z)(\overline{u'w'}) \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

As covariâncias no terceiro termo do lado direito da equação e nos termos similares nas demais equações (ao todo são cinco equações) obtidas após a média do Reynolds são fluxos turbulentos. Devemos notar que  $\overline{(w'T')}$  é fluxo vertical de calor,  $\overline{(w'u')}$  é fluxo vertical da quantidade de movimento zonal, etc. Para obter a Equação 5.9 usamos a equação da continuidade.

$$\partial \overline{u} / \partial x + \partial \overline{v} / \partial y + \partial \overline{w} / \partial z = 0 \Rightarrow \partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y + \partial w' / \partial z = 0 \quad (5.10)$$

Observa-se que o conjunto de Equações 5.9 e similares não é fechado, porque além de cinco variáveis,  $\overline{u}$ ,  $\overline{v}$ ,  $\overline{w}$ ,  $\overline{\theta}$ ,  $\overline{p}$ , tem-se nas equações os desconhecidos fluxos. Portanto, para fechar o conjunto, precisamos de algumas suposições.

Longe das irregularidades de superfície como regiões costeiras, cidades, beiras de florestas, etc. Podemos assumir que os fluxos são horizontalmente homogêneos. Assim,  $\partial \overline{(w'T')} / \partial x, \partial \overline{(w'T')} / \partial y$  e termos similares são desprezados. Nesse caso, as equações de movimento horizontal reduzem-se para

$$\overline{Du} / Dt = 1/\rho_0 (\partial \overline{p} / \partial x) + f \overline{v} - (\partial / \partial z)(\overline{u'w'}) \quad (5.11)$$

$$\overline{Dv} / Dt = 1/\rho_0 (\partial \overline{p} / \partial y) + f \overline{u} - (\partial / \partial z)(\overline{v'w'}) \quad (5.12)$$

Relembramos que a desprezamos a viscosidade molecular os i.e., os termos de atrito  $F_{rx}$  e  $F_{ry}$  por serem muito pequenos. Nestas equações

$$\overline{Du} / Dt \equiv \partial \overline{u} / \partial t + \overline{u}(\partial \overline{u} / \partial x) + \overline{v}(\partial \overline{u} / \partial y) + \overline{w}(\partial \overline{u} / \partial z) \quad e \quad (5.13)$$

$$\overline{Dv} / Dt \equiv \partial \overline{v} / \partial t + \overline{v}(\partial \overline{v} / \partial x) + \overline{v}(\partial \overline{v} / \partial y) + \overline{w}(\partial \overline{v} / \partial z). \quad (5.14)$$

#### 5.4. Escoamento balanceado

Para os sistemas sinóticos das latitudes médias, os termos de inércia são desprezíveis em comparação com os demais termos das equações de movimento e, portanto, podemos obter um balanço entre três forças: força de Coriolis, força de gradiente de pressão e força de viscosidade turbulenta, da seguinte maneira.

$$-f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \partial(\overline{u'w'}) / \partial z = 0 \tag{5.15}$$

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \partial(\overline{v'w'}) / \partial z = 0 \tag{5.16}$$

onde  $\bar{u}_g = -(1/\bar{\rho}_0)(\partial\bar{p}/\partial y)$  e  $\bar{v}_g = +(1/\bar{\rho}_0)(\partial\bar{p}/\partial x)$ .

Este é um escoamento balanceado (sem acelerações).

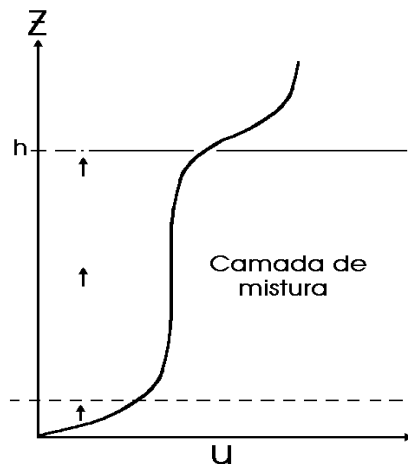
### 5.5. Camada limite de mistura

Próximo da superfície existe uma camada atmosférica que é bem misturada, e apresenta  $\theta$  e  $V$  constantes com altura. Nesse caso podemos, supondo-se que os fluxos turbulentos variam linearmente com altura, integrar as Equações 5.15 e 5.16, obtidas na seção anterior, na vertical, de  $z = 0$  a  $z = h$  para obter:

$$-f(\bar{u} - \bar{u}_g)h - (\overline{u'w'}) = 0 \tag{5.17}$$

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g)h - (\overline{v'w'}) = 0 \tag{5.18}$$

onde  $h$  é a profundidade da “camada de mistura”. Aqui foi feita a suposição de que os fluxos turbulentos reduzem-se a zero em  $z = h$  conforme a Figura 5.1.



**Figura 5.1:** Esquemática da camada de mistura. As setas verticais representam os fluxos de momentum e de calor.

As observações mostram que:

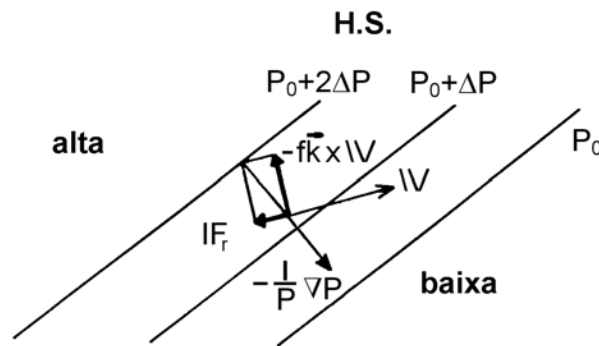
$$(\overline{u'w'}) = C_d |\bar{V}| \bar{u}, (\overline{v'w'}) = C_d |\bar{V}| \bar{v} \tag{5.19}$$

Isso significa que o fluxo turbulento é proporcional ao produto entre a magnitude do vento e o componente do vento, onde o constante de proporcionalidade  $C_d$  é chamado coeficiente de arrasto (*drag coefficient*) e é adimensional.  $C_d$  apresenta valores da ordem de  $1,5 \times 10^{-3}$  sobre superfícies oceânicas, e valores maiores sobre as superfícies continentais mais rugosas.

Em caso do estado permanente, somando vetorialmente as primeiras duas equações desta seção, tem-se

$$f\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{V}} = -(1/\rho_0)\nabla\bar{p} - (C_d/h)|\bar{\mathbf{V}}|\bar{\mathbf{V}} \tag{5.20}$$

O primeiro termo é a força de Coriolis, o segundo termo é a força de gradiente de pressão e o terceiro termo é a força do arrasto turbulento. Este tipo de balanço está esquematizado na Figura 5.2.



**Figura 5.2:** Balanço de forças em um escoamento permanente na camada de mistura.

Notamos que o arrasto (ou atrito) sempre atua no sentido oposto do movimento, a força do gradiente de pressão no sentido de baixa pressão (contra o gradiente de pressão) e a força de Coriolis atua para a esquerda do movimento (no Hemisfério Sul). O resultante das forças de Coriolis e do atrito é exatamente igual e no sentido oposto à força de gradiente de pressão. É importante ressaltar que, com a presença de atrito ou arrasto, o vento balanceado possui um componente de altas pressões baixas pressões, diferente do vento geostrófico.

### 5.6. Teoria K

Em condições estáveis (ou quando a coluna atmosférica está estaticamente estável) não ocorre muita mistura na vertical, e portanto, o vento varia muito com a altura. Nestas condições o modelo de arrasto não se aplica. Para tratar melhor os efeitos da turbulência em condições normais de estabilidade usaremos uma analogia da difusão molecular. Nesse caso, os fluxos turbulentos verticais são proporcionais aos gradientes verticais dos parâmetros em questão. Assim tem-se, para fluxos da quantidade de movimento

$$\overline{u'w'} = -K_m(\partial\bar{u}/\partial z)$$

$$\overline{v'w'} = -K_m (\partial \bar{v} / \partial z) \quad (5.21)$$

e para o fluxo de temperatura potencial

$$\overline{\theta'w'} = -K_h (\partial \bar{\theta} / \partial z) \quad (5.22)$$

onde  $K_m$  e  $K_h$  são coeficientes de viscosidade turbulenta ( $m^2 s^{-1}$ ) para quantidade de movimento e para calor, respectivamente. Esta suposição para fechamento de equações é chamada “teoria K”. O coeficiente de viscosidade é determinado empiricamente para cada situação. Os modelos de extrema simplicidade assumem que os coeficientes são constantes.

### 5.7. Camada de Ekman

Utilizando a teoria K nas equações de movimento horizontal 5.15 e 5.16 do estado permanente tem-se

$$K_m (\partial^2 u / \partial z^2) + f(v - v_g) = 0, K_m (\partial^2 v / \partial z^2) + f(u - u_g) = 0 \quad (5.23)$$

onde deixamos de usar, para maior conveniência, a barra de Reynolds nos variáveis. Pode-se combinar as duas equações em uma única equação da seguinte forma:

$$K_m [\partial^2 (u + iv) / \partial z^2] - if(u + iv) = -if(u_g + iv_g) \quad (5.24)$$

onde  $i = (-1)^{1/2}$ . Esta equação pode ser solucionada para obter a dependência do vento sobre a altura. Todavia, precisamos especificar condições de contorno para integrar as equações.

Vamos supor que o vento é zero na superfície (da Terra), e tende ao vento geostrófico em grandes alturas acima da superfície. Isto é,

$$u, v = 0 \text{ em } z = 0, \text{ e } u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g \text{ em } z \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Finalmente, vamos supor, sem nenhuma perda de generalidade, que o escoamento está direcionado de tal forma que o vento geostrófico é zonal, ou seja,  $v_g = 0$ . Para o Hemisfério Sul (HS)  $f < 0$ , isto é,  $f = -|f|$ . Notamos também que  $(i)^{1/2} = (1+i)/\sqrt{2}$ . A solução geral da equação diferencial 5.24 para HS é

$$(u + iv) = A \exp\{(1/\sqrt{2})(i-1)(|f|/K_m)^{1/2}z\} + B \exp\{-(1/2)(i-1)(|f|/K_m)^{1/2}z\} + u_g \quad (5.26)$$

onde A e B são constantes a serem determinados usando as condições de contorno 5.25. Aplicando as condições de contorno na solução 5.26 tem-se, para o caso de HS,  $B = 0$  e  $A = -u_g$ . Portanto a solução completa (para SH) é

$$(u + iv) = u_g [1 - \exp\{(1/\sqrt{2})(i-1)(|f|/K_m)^{1/2}z\}] \quad (5.27)$$

Agora, notando que

$$\exp\{i(|f|/2K_m)^{1/2}z\} = \cos(|f|/2K_m)^{1/2}z + i \operatorname{sen}(|f|/2K_m)^{1/2}z \quad (5.28)$$

tem-se

$$u = u_g \{1 - \exp\{-(|f|/2K_m)^{1/2}z\} \cos\{(|f|/2K_m)^{1/2}z\}\} \quad (5.29)$$

$$v = -u_g \exp\{-(|f|/2K_m)^{1/2}z\} \operatorname{sen}\{(|f|/2K_m)^{1/2}z\}. \quad (5.30)$$

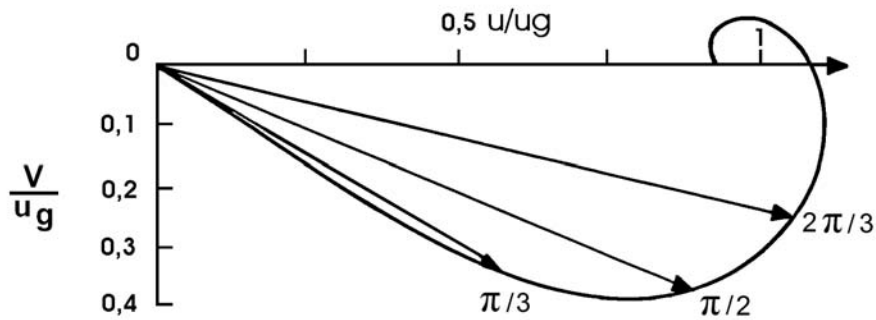
Designando  $\gamma \equiv (|f|/2K_m)^{1/2}$ , pode-se escrever

$$u = u_g \{1 - \exp\{-\gamma z\} \cos\{\gamma z\}\} \quad (5.31)$$

$$v = -u_g \exp\{-\gamma z\} \operatorname{sen}\{\gamma z\}. \quad (5.32)$$

Esta solução foi obtida, pela primeira vez, para correntes marítimas no Hemisfério Norte pelo oceanógrafo Ekman.

A estrutura da solução é melhor apresentada pelo hodógrafo dos ventos com altura. Para o HS o hodógrafo é dado na Figura 5.3. Nos eixos  $x$  e  $y$  são representados os componentes do vento normalizados pelo vento geostrófico ( $u/u_g$  e  $v/u_g$ ). Os vetores correspondentes aos ventos obtidos da solução em diferentes intervalos da altura atmosférica são plotados no gráfico. A curva que liga as pontas dos vetores é o hodógrafo. Ele tem um formato de espiral que é chamado “espiral de Ekman”.

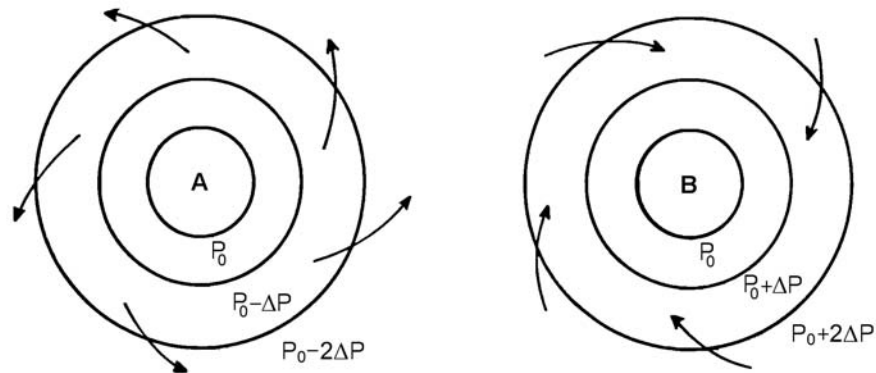


**Figura 5.3:** Espiral de Ekman para Hemisfério Sul.

Notamos que, para  $z = \pi/\gamma$  o vento é paralelo ao vento geostrófico e é aproximadamente igual na magnitude. Os meteorologistas designam este nível como o topo da camada de Ekman,  $D_e$ . Pelas observações nas latitudes médias  $D_e$  é da ordem de 1 km,  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , portanto  $K_m \sim 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

A camada de Ekman ideal discutida nesta seção é raramente observada. Uma das razões é que  $K_m$  não é constante na realidade. Todavia, a solução de Ekman mostra que, na presença de viscosidade, o vento possui um componente perpendicular às isóbaras direcionado para baixas pressões. Isso implica em divergência de massa nas circulações

anticiclônicas em uma convergência de massa nas circulações ciclônicas, conforme Figura 5.4.



**Figura 5.4:** Circulação anticiclônica com divergência e circulação ciclônica com convergência, na presença de atrito.

**5.8. Transporte de massa na camada de Ekman**

O transporte meridional de massa é representada por  $\rho_0 v$ . (Em caso geral de  $v_g \neq 0$  o transporte é perpendicular as isóbaras.) O transporte total da massa para toda coluna de ( $z = 0$  a  $z = D_e$ ) de largura unitária na camada de Ekman pode ser obtida da seguinte forma:

$$M = \int_0^{D_e} \rho_0 v dz = - \int_0^{D_e} \rho_0 u_g \exp\{-\gamma z\} \text{sen}\{\gamma z\} dz = - \int_0^{D_e} \rho_0 u_g \exp\{-\pi z/D_e\} \text{sen}\{\pi z/D_e\} dz \quad (5.33)$$

onde  $D_e = \pi/\gamma$  é a profundidade da camada de Ekman.

Integrando a equação de continuidade para um fluido incompressível entre  $z = 0$  e  $z = D_e$ , tem-se

$$w(D_e) = - \int_0^{D_e} (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) dz \quad (5.34)$$

onde usamos a condição de contorno,  $w(z=0) = 0$ . Assumindo  $v_g = 0$  e  $u_g$  independente de  $x$ , tem-se

$$w(D_e) = - \int_0^{D_e} (\partial u_g / \partial y) \exp(-\gamma z) \text{sen}(\gamma z) dz \quad (5.35)$$

Agora, notando que  $(-\partial u_g / \partial y) = \zeta_g$ , e comparando as duas Equações 5.33 e 5.35 tem-se

$\rho_0 w(D_e) = - \partial M / \partial y$ , e após a integração acha-se, no HS,

$$w(D_e) = (1/2\gamma)\zeta_g = - \zeta_g [K_m/2 |f|] \quad (5.36)$$

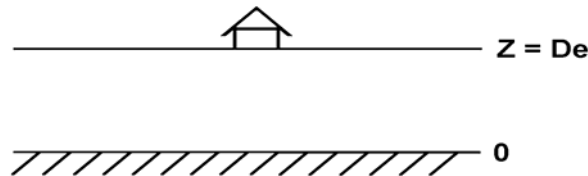


onde a variação de  $\rho_0$  na camada foi desprezada e supõe-se que  $1 + \exp(-\pi) \sim 1$ .

O significado deste resultado é que o transporte vertical de massa no topo de camada de Ekman é proporcional à vorticidade geostrófica acima de camada de Ekman. Veja a Figura 5.5. A circulação forçada pelas convergências e divergências de massa na camada limite é uma circulação secundária. A circulação primária é a própria circulação ciclônica ou anticiclônica geostrófica. O processo de transportar verticalmente massa pelos movimentos turbulentos é chamado de bombeamento de camada limite.

Para valores numéricos observados nos movimentos da escala sinótica  $\zeta_g \sim -10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $f = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , e  $D_e = 1 \text{ km}$ , tem-se  $w(D_e)$  é da ordem de alguns  $\text{mm s}^{-1}$ .

Todavia, as circulações secundárias são responsáveis pela dissipação das circulações primárias.



**Figura 5.5:** Esquemática do bombeamento de Ekman.  $D_e$  é a profundidade da camada limite de Ekman.

### 5.9. “Spindown” ou decaimento

Um bombeamento análogo da camada de Ekman é responsável pela dissipação da circulação em um xícara de chá mexida. Longe das paredes e do fundo da xícara as forças de gradiente de pressão e centrífuga possuem um balanço aproximado. Todavia, próximo do fundo da xícara a força de atrito (viscosidade turbulenta) desacelera o movimento, e a força centrífuga não é suficiente para contrabalançar a força de gradiente de pressão. Surge, então, escoamento (ou fluxo de massa) para dentro (radialmente para o centro) da xícara. Por esta razão as folhas de chá acumulam no centro do fundo da xícara. Pela continuidade de massa acontece movimento vertical para cima dentro da camada de atrito e movimento radialmente para fora do centro no fluido acima desta camada. Ou, a divergência acima da camada de atrito compensa a convergência dentro da camada de atrito. Devemos lembrar que as parcelas do fluido tendem a conservar as suas quantidades de movimento. Troca de fluido de altos valores de quantidade de movimento angular por fluido de baixos valores de quantidade de movimento angular tende a reduzir a vorticidade do chá muito mais efetivamente do que a difusão pelos turbilhões. Ou, as circulações secundárias desintensificam a vorticidade da circulação primária muito mais depressa que os processos de difusão molecular e turbulenta. Este enfraquecimento da vorticidade é chamado “spindown”. O intervalo de tempo característico para “spindown” é facilmente obtido para um fluido barotrópico.

Para uma atmosfera barotrópica tem-se

$$D\zeta_g / Dt = -f(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) = f(\partial w / \partial z). \quad (5.37)$$

Supondo  $f$  constante, e  $\zeta_g \ll f$  e lembrando-se que em um fluido barotrópico a vorticidade geostrófica é independente da altura podemos integrar a Equação 5.37 de  $z = D_e$  a  $z = H$ , na qual  $H$  é a altura de tropopausa. Isso dá

$$D\zeta_g / Dt = f[w(H) - w(D_e)] / [H - D_e].$$

Assumindo  $H \gg D_e$ , e  $w(H) = 0$ , tem-se

$$D\zeta_g / Dt = (|f| K_m / 2H^2)^{1/2} \zeta_g$$

Uma integração no tempo dá

$$\zeta_g(t) = \zeta_g(0) \exp(-t/\tau_e)$$

onde  $\tau_e = H(2/|f|K_m)^{1/2}$  é o tempo de “spindown” barotrópico.

Para valores típicos de  $H = 10$  km,  $f = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $K_m = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , estimamos a ordem do tempo de “spindown” como 4 dias. Notamos que, em comparação com o tempo de spindown para os processos de difusão de aproximadamente 100 dias, o tempo de spindown para processos de circulações secundárias é extremamente pequeno. Isto é, as circulações secundárias devido “Ekman Pumping” são muito mais eficientes do que a difusão turbulenta na dissipação das circulações primárias de larga escala.

# Capítulo 6

## 6.1. Movimentos de escala sinótica

Circulações das perturbações atmosféricas da escala horizontal da ordem de 1000 *km* ou mais, como centros de alta e baixa pressão, cavados e cristas, frentes frias e quentes, etc., não são adequadamente descritas por observações feitas em apenas um local. Para uma descrição satisfatória destas, precisamos ter observações simultâneas sobre uma região extensa (alguns milhares de *km* na horizontal e umas dezenas de *km* na vertical). Imagens de satélites hemisféricos e cartas plotadas das observações meteorológicas mostram que existem, nas latitudes médias, distúrbios atmosféricos transitórios não permanentes que se estendem sobre milhares de *km* na horizontal. As diversas partes desses distúrbios como centros de alta e baixa pressão, correntes de ventos fortes, etc. são inseparáveis e formam um sistema. O sinônimo de “simultâneo” é “sinótico”, e por isso os distúrbios são chamados “sistemas sinóticos”.

As leis de física que governam os movimentos atmosféricos são: a conservação de quantidade de movimento, a conservação de massa e a conservação de energia. Elas determinam completamente a relação entre pressão, temperatura e movimento. Todavia, mesmo admitindo o balanço hidrostático, as equações são complexas. Para os movimentos de escala sinótica nas latitudes médias, o vento é aproximadamente geostrófico. Esses movimentos, comumente conhecidos como “quasigeostróficos”, são relativamente fáceis de análise.

Nesse capítulo veremos que, para sistemas sinóticos de latitudes médias, a distribuição de altura geopotencial nas superfícies isobáricas determina, com uma boa aproximação, a estrutura atmosférica tridimensional e a sua evolução temporal. As equações que expressam estas relações constituem o sistema de equações quasigeostrófico.

## 6.2. Estrutura observada das circulações extratropicais

Os sistemas de circulações extratropicais não possuem uma forma redonda e simples. Existem regiões de concentração de gradientes de temperatura e de ventos fortes. Estas regiões altamente baroclínicas são chamadas frentes. As amplitudes e fases da variabilidade dos campos de geopotencial e de movimento variam com a altura, assim caracterizando o escoamento como baroclínico. Os sistemas sinóticos estão embebidos no escoamento de escala planetária, que por sua vez é altamente baroclínico e sofre influências orográficas e dos contrastes oceano-contidente.

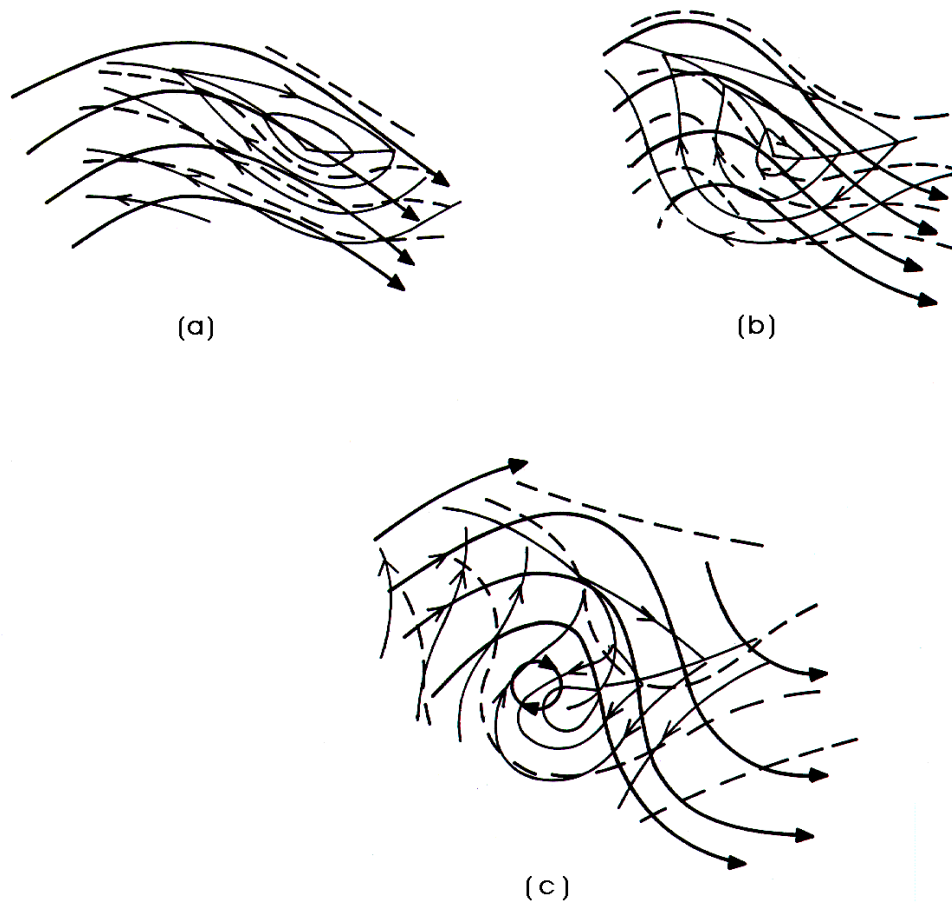
Seções meridionais (ou seções no plano altura-latidade) dos campos atmosféricos zonalmente mediados revelam a estrutura da circulação planetária. As assimetrias longitudinais dos movimentos atmosféricos podem ser apreciadas através dos campos hemisféricos nas superfícies isobáricas (ou equivalentemente nos níveis horizontais). As assimetrias variam com a estação do ano. Em particular, os campos de geopotencial em 500 hPa para janeiro (representando a estação de verão) e julho (representando a estação de

inverno) são de grande interesse e são mostradas nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 do livro de Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology* (3ª edição). Estes campos são discutidos na aula.

O eixo de corrente de jato, em um dado instante, localiza-se sobre uma zona estreita e inclinada do gradiente térmico intenso chamada frente polar. Esta zona separa a massa de ar frio para o lado do polo e a massa de ar quente para o lado do equador. A existência dos ventos fortes na troposfera superior na zona frontal, se deve ao balanço do vento térmico. As zonas de forte cisalhamento de vento são normalmente instáveis para perturbações da escala sinótica. Isto é, uma perturbação de amplitude pequena superposta sobre o corrente de jato amplifica-se, recebendo energia do estado básico representado pelo corrente de jato. Aumento da amplitude da perturbação significa aumento da energia (potencial mais cinética) da perturbação. O estado básico fornece a energia necessária para o aumento da energia da perturbação. Este processo constitui instabilidade hidrodinâmica. No caso de amplificação dos distúrbios da escala sinótica nas latitudes médias, a instabilidade é chamada “instabilidade baroclínica”, que depende do gradiente meridional de temperatura na superfície. A perturbação ou distúrbio que cresce em amplitude, por sua vez, gera zonas de gradiente térmico forte, que são as frentes.

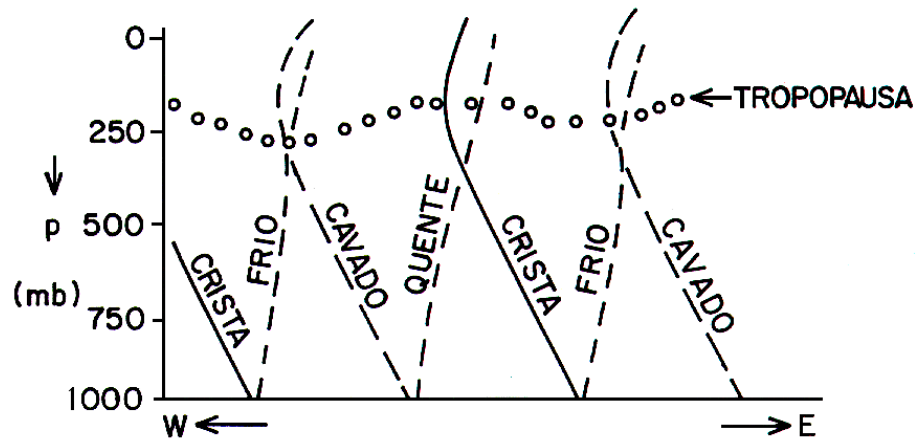
Os estágios de desenvolvimento baroclínico das perturbações sinóticas estão esquematizados na Figura 6.1. A seção zonal (seção altura-longitude) da estrutura vertical desta perturbação em crescimento está mostrada na Figura 6.2. As linhas cheias reforçadas são as linhas de corrente em 500 hPa, as linhas cheias finas são isóbaras na superfície (no nível médio do mar) e as linhas quebradas são as isolinhas de espessura (isotermas médias da baixa troposfera). As frentes frias e quentes são indicadas com símbolos tradicionais. Uma explicação detalhada das figuras será dada na aula.

No estágio de crescimento rápido, os escoamentos de altos e baixos níveis cooperam. Uma forte advecção de ar frio ocorre à oeste do centro de baixa pressão na superfície, e uma fraca advecção quente ocorre no setor leste da baixa. Este padrão de advecção é uma consequência direta da inclinação dos cavados e cristas para oeste com a altura. Notamos, especificamente, que o cavado em 500 hPa localiza-se a oeste da posição do cavado em 1000 hPa. As inclinações são uma consequência do balanço hidrostático.



**Figura 6.1:** Estágios de desenvolvimento de um sistema baroclínico de latitudes médias no Hemisfério Sul. (a) onda incipiente, (b) em desenvolvimento e (c) madura. Linhas finas cheias são isóbaras na superfície. Linhas quebradas são isotermas. Linhas grossas são linhas de corrente em 500hPa.

Os ventos geostróficos médios da camada 1000 – 500 hPa são direcionados para maiores espessuras (isto é, para regiões mais quentes) a oeste do cavado em superfície, e a leste do cavado ocorre o contrário. A Figura 6.2. esquemática é o corte vertical de oeste para leste de uma perturbação em desenvolvimento idealizada. Enquanto os cavados e cristas inclinam-se para oeste com altura, os núcleos de ar quente e ar frio inclinam-se para leste.



**Figura 6.2:** Onda sinótica das latitudes médias compostas de cavados e cristas inclinados para oeste na vertical.

Na fase madura de perturbação, os cavados em 500 hPa e 1000 hPa apresentam-se com a mesma fase. Como consequência, as advecções térmicas ficam fracas. As características dos movimentos descritos implicam na conversão de energia potencial do estado básico em energia das perturbações durante o estágio de crescimento. A exata natureza das conversões energéticas será tratada numa versão futura.

### 6.3. Aproximação quasigeostrófica

Usaremos para tratamento deste assunto equações em coordenadas  $x, y, p, t$ . As equações governantes, após desprezar o atrito ou viscosidade, são

$$DV/Dt + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\Phi \tag{6.1}$$

$$\partial\Phi/\partial p = -\alpha = -RT/p \tag{6.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \partial\omega/\partial p = 0 \tag{6.3}$$

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla)T - S_p\omega = J/C_p \tag{6.4}$$

onde

$$D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \omega(\partial/\partial p) ; \omega \equiv Dp/Dt ; S_p \equiv -T(\partial \ln \theta / \partial p) \tag{6.5}$$

Notamos que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_a$ , onde  $\mathbf{V}_a$  é a parte do vento não geostrófico, e

$$\mathbf{V}_g = (1/f_0)\mathbf{k} \times \nabla\Phi \tag{6.6}$$

Faz-se as seguintes considerações, que são válidas para os sistemas sinóticos de latitudes médias:

$$|\mathbf{V}_g| \gg |\mathbf{V}_a| \text{ ou equivalentemente } |\mathbf{V}_a|/|\mathbf{V}_g| \sim O(R_o),$$

onde “O” significa “ordem de magnitude” e  $R_o$  é o número de Rossby, que assume valor típico de  $10^{-1}$  para os movimentos ou circulações da escala sinótica. Devemos lembrar que a divergência do vento geostrófico (para  $f$  constante) é nula, e portanto, a divergência horizontal é devida ao vento ageostrófico.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}_g + \nabla \cdot \mathbf{V}_a = \nabla \cdot \mathbf{V}_a.$$

A equação de continuidade dá

$$\partial\omega/\partial p = -\nabla \cdot \mathbf{V}_a \tag{6.7}$$

Isso significa que a velocidade vertical é inteiramente devida ao vento ageostrófico.

Como uma primeira aproximação, podemos dizer que

$$D\mathbf{V}/Dt \approx D_g\mathbf{V}_g/Dt$$

onde  $D_g/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V}_g \cdot \nabla = \partial/\partial t + u_g(\partial/\partial x) + v_g(\partial/\partial y)$ , e na definição do vento geostrófico (equação 6.6) consideramos  $f=f_o$ , constante.

Todavia, a variação de  $f$  com latitude é importante para incluir efeitos dinâmicos. Expandindo  $f(y)$  em série de Taylor tem-se

$$f = f_o + (\partial f/\partial y)y + \dots \text{ (termos de alta ordem em } y\text{)}.$$

Para  $y$  suficientemente pequeno vamos desprezar os termos de alta ordem para

$$f = f_o + (\partial f/\partial y)y \equiv f_o + \beta y \tag{6.8}$$

onde  $\beta = 2\Omega \cos\phi_o/a$  e  $y = 0$  em  $\phi = \phi_o$ . Esta aproximação com  $\phi_o \sim 45^\circ$  é chamada a aproximação do plano  $\beta$  de latitudes médias. Para movimentos de escala sinótica  $\beta y \sim \beta L$  ( $L$  é a escala espacial horizontal). Assim

$$\beta L/f_o \sim (\cos\phi_o/\sin\phi_o)(L/a) \sim O(R_o) \ll 1.$$

Esta é uma justificativa para ter um valor constante  $f_o$  na aproximação geostrófica. Agora a equação do movimento (6.1) pode ser escrita

$$D_g\mathbf{V}_g/Dt = -(\mathbf{f}\mathbf{k}\times\mathbf{V} + \nabla\Phi) = -(f_o + \beta y)\mathbf{k}\times(\mathbf{V}_g + \mathbf{V}_a) - \nabla\Phi \approx -f_o\mathbf{k}\times\mathbf{V}_a - \beta y\mathbf{k}\times\mathbf{V}_g \tag{6.9}$$

Na equação termodinâmica (6.4) a advecção horizontal pode ser aproximada pela advecção geostrófica. A advecção vertical não é desprezada porque os gradientes verticais

de temperatura são muito grandes, embora os movimentos verticais sejam pequenos. Esse termo foi combinado com o termo de aquecimento adiabático. Todavia, podemos simplificar a equação mais um pouco. Considera-se que

$$T_{\text{tot}} = T_0(p) + T(x, y, p, t) \quad (6.10)$$

onde  $T_0$  é um estado básico,  $T$  é o desvio devido a distúrbio relacionado com o sistema sinótico e  $T_{\text{tot}}$  é a temperatura total. Consideremos que  $|\partial T_0/\partial p| \gg |\partial T/\partial p|$  e usamos apenas a parte da variação vertical de temperatura do estado básico no parâmetro de estabilidade estática. Com isso a Equação (6.4) simplifica-se para

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V}_g \cdot \nabla)T - (\sigma p/R)\omega = J/C_p \quad (6.11)$$

onde  $\sigma \equiv - (RT_0/p) (d \ln \theta_0 / dp)$  na qual  $\theta_0$  é a temperatura potencial correspondente a  $T_0$ .  $\sigma$  é um parâmetro de estabilidade do estado básico.

As Equações 6.2, 6.6, 6.7, 6.9 e 6.11 formam o conjunto de equações quasigeostrófico. Se  $J$  é especificado, o conjunto é completo nos cinco variáveis dependentes  $\Phi$ ,  $T$ ,  $\mathbf{V}_g$ ,  $\mathbf{V}_a$  e  $\omega$ .

#### 6.4. Equação de vorticidade quasigeostrófica

Equações de movimento horizontal escalares são (proveniente da Equação 6.9).

$$D_g u_g / Dt - f_0 v_a - \beta y v_g = 0$$

$$D_g v_g / Dt + f_0 u_a - \beta y u_g = 0$$

Aplicando o operador  $(\partial/\partial y)$  à primeira equação e o operador  $(\partial/\partial x)$  à segunda equação, e obtendo a diferença tem-se - á

$$D_g \zeta_g / Dt = - f_0 (\partial u_a / \partial x + \partial v_a / \partial y) - \beta v_g$$

Uma vez que  $D_g f / Dt = \beta v_g$  podemos escrever a equação, usando a equação da continuidade 6.7, da seguinte maneira

$$\partial \zeta_g / \partial t = - \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) + f_0 (\partial \omega / \partial p) \quad (6.12)$$

O significado desta equação é o seguinte: a taxa local de variação de vorticidade geostrófica está dada pelo somatório da advecção geostrófica de vorticidade absoluta e do efeito da divergência. A equação de vorticidade quasigeostrófica (Equação 6.12) descreve a evolução da vorticidade geostrófica.

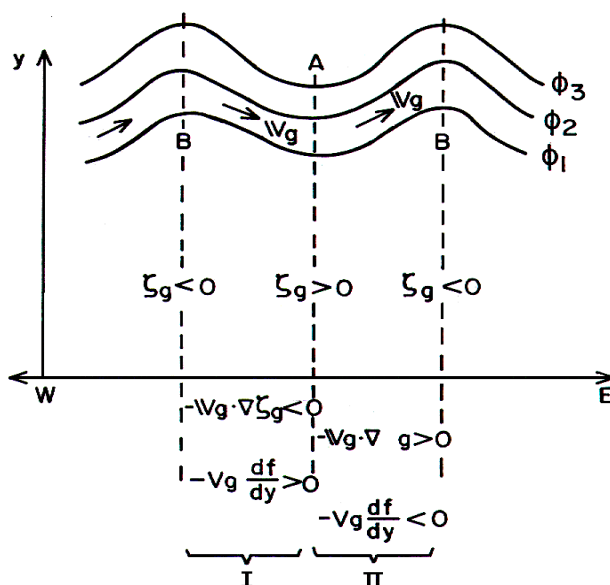


### 6.5. Efeitos da advecção de vorticidade

A advecção de vorticidade é composta da advecção da vorticidade relativa e a advecção de vorticidade planetária, isto é,

$$- \mathbf{V}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f) = - \mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g - \beta v_g.$$

Para entender os efeitos desses dois termos, vamos considerar uma perturbação ondulatória senoidal de geopotencial em 500 hPa, conforme mostrada na Figura 6.3. Nesta figura idealizada, os cavados e as cristas estão mostrados com linhas verticais quebradas, os ventos estão mostrados com setas entre as isolinhas de geopotencial. A situação é típica do Hemisfério Sul.



**Figura 6.3:** Onda sinótica na média troposfera no plano horizontal, mostrando regiões ciclônicas ( $\zeta < 0$ ) e anticiclônicas ( $\zeta > 0$ ) e regiões de advecção ciclônica e advecção anticiclônica.

Cavado é uma região alongada de relativa baixa pressão e, portanto, é uma região de vorticidade (geostrófica) ciclônica. Uma crista é uma região alongada de relativa alta pressão. Em torno de um cavado, num escoamento básico de oeste, as linhas de corrente ondulam para o lado do equador. Em torno de uma crista elas ondulam para o lado do pólo, em ambos os hemisférios.

Primeiro recordamo-nos que em regiões da circulação ciclônica o sinal da vorticidade relativa (geostrófica)  $\zeta_g$  é igual ao sinal do parâmetro de Coriolis,  $f$ . Isto é, no HS  $\zeta_g < 0$  nas regiões ciclônicas. Devemos também lembrar que  $\beta$  é positivo em ambos hemisférios.

A partir da Figura 6.3 podemos facilmente deduzir que, a leste do cavado, a advecção da vorticidade relativa é ciclônica e, a oeste do cavado, ela é anticiclônica. Ou, a tendência da vorticidade a leste do cavado é aumento da vorticidade ciclônica, e a oeste do cavado é

decaimento da vorticidade ciclônica. Por este motivo o cavado desloca-se para leste, pelo efeito da advecção da vorticidade relativa. O efeito da advecção da vorticidade planetária é o oposto, e a onda tende a deslocar-se para oeste devido a este efeito. O efeito líquido depende das magnitudes relativas dos dois termos.

Suponhamos que o campo de geopotencial pode ser expresso da seguinte forma

$$\Phi(x, y, p, t) = \bar{\Phi}(y, p) + \Phi'(p, t) \text{sen}kx \text{cos}ly \quad (6.13)$$

e que

$$\bar{\Phi}(y, p) = \Phi_o(p) - f_o U y$$

onde  $\Phi'$  é a amplitude do componente ondulatório,  $k = 2\pi/L_x$ ,  $l = 2\pi/L_y$  são números de onda,  $L_x$  e  $L_y$  são os comprimentos de onda nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $U$  é um vento zonal médio constante. Neste caso, a vorticidade geostrófica relativa é dada por

$$\zeta_g = (1/f_o)\nabla^2\Phi = - (1/f_o)(k^2+l^2) \Phi'(p, t) \text{sen}kx \text{cos}ly = - (1/f_o)(k^2+l^2) (\Phi - \bar{\Phi})$$

Isto é, a vorticidade geostrófica é proporcional ao quadrado de número de onda. Ou, para uma dada amplitude, ondas curtas ( $k, l$  maiores) apresentam vorticidade relativa maior do que ondas longas ( $k, l$  menores). Portanto, o efeito da advecção de vorticidade relativa é maior para ondas curtas, e o efeito da advecção de vorticidade planetária é maior para ondas longas. Ou, ondas curtas tendem a propagar-se para leste e ondas longas para oeste.

## 6.6. Equação de tendência geopotencial

A advecção de vorticidade sozinha não determina completamente a evolução temporal das ondas meteorológicas. As circulações verticais associadas às advecções térmicas diferenciais modificam a evolução.

As equações de vorticidade e termodinâmica (6.12 e 6.11) quasigeostrófica são

$$\partial\zeta_g/\partial t = - \mathbf{V}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f) + f_o(\partial\omega/\partial p)$$

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V}_g \cdot \nabla)T - (\sigma p/R)\omega = J/C_p.$$

Podemos escrever  $\zeta_g = - (1/f_o)\nabla^2\Phi$  ;  $\mathbf{V}_g = (1/f_o)\mathbf{kx}\nabla\Phi$  ;  $T = - (p/R)(\partial\Phi/\partial p)$ . Portanto, se desconsiderarmos aquecimento diabático, as duas equações formam um conjunto completo de equações em duas variáveis dependentes  $\Phi$  e  $\omega$ .

Vamos designar a tendência de geopotencial  $\partial\Phi/\partial t$  pela letra  $\chi$ . Com isso as duas equações do conjunto quasigeostrófico podem ser escritas:

$$\partial\chi/\partial p = - \mathbf{V}_g \cdot \nabla(\partial\Phi/\partial p) - \sigma\omega \quad (6.14)$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\{1/f_0\} \nabla^2 \Phi + f) + f_0^2 (\partial \omega / \partial p) \quad (6.15)$$

Destas duas equações podemos eliminar  $\omega$  para obter uma equação em  $\Phi$  apenas. Assim

$$[\nabla^2 + (\partial / \partial p) \{ (f_0^2 / \sigma) (\partial / \partial p) \}] \chi = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\{1/f_0\} \nabla^2 \Phi + f) - (\partial / \partial p) [ - (f_0^2 / \sigma) \mathbf{V}_g \cdot \nabla (-\partial \Phi / \partial p) ]. \quad (6.16)$$

Esta equação significa que as mudanças no campo de geopotencial dependem da advecção de vorticidade e da advecção térmica diferencial.

Dada a distribuição de geopotencial em um instante, a equação pode ser empregada, teoricamente, para calcular a evolução do próprio geopotencial. Isto é, a equação pode ser usada para fazer previsões.

Para analisar heurísticamente a equação, vamos assumir um padrão de onda para o campo de  $\chi$  e para os forçantes da Equação 6.16 como segue:

$$\chi(x, y, p, t) \approx X(p, t) \text{ sen } kx \text{ cos } ly$$

$$-f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\{1/f_0\} \nabla^2 \Phi + f) \approx F_v(p) \text{ sen } kx \text{ cos } ly$$

$$-(f_0^2 / \sigma) \mathbf{V}_g \cdot \nabla (-\partial \Phi / \partial p) \approx F_T(p) \text{ sen } kx \text{ cos } ly$$

onde  $X$  é amplitude da tendência geopotencial,  $F_v$  e  $F_T$  representam as dependências das advecções da vorticidade e da temperatura, respectivamente, sobre a pressão. Notamos que  $\nabla^2 \chi \approx - (k^2 + l^2) \chi$ . Substituindo estas considerações na equação de tendência (6.16) tem-se-á

$$d^2 X / dp^2 - \lambda^2 X = (\sigma / f_0^2) (F_v - \partial F_T / \partial p) \quad (6.17)$$

$$\text{onde } \lambda^2 \equiv (k^2 + l^2) \sigma / f_0^2.$$

Por hora, desprezamos a dependência da  $\sigma$  sobre a pressão. Na Equação 6.17 os termos do lado direito são forçantes para a tendência geopotencial. O primeiro termo do lado esquerdo da equação tem efeito de espalhar a resposta do forçante na vertical. Isto é, o efeito em uma altitude é sentido em outras altitudes. Pelo segundo termo do lado esquerdo, um forçante aplicado em um dado nível afeta demais níveis em uma espessura inversamente proporcional a  $\lambda$ . Isto é, para ondas curtas (ou  $k^2 + l^2$  grande) as tendências de geopotencial devido ao efeito de forçante confinam próximo ao nível. Para ondas longas (ou  $k^2 + l^2$  pequeno) o efeito se estende grandes distâncias na vertical.

O primeiro termo do lado direito é o principal forçante dos altos níveis. Na região de advecção positiva de vorticidade relativa, o Laplaciano de tendência torna-se negativa no HS. Isso implica que a tendência é positiva e o geopotencial tende a aumentar. Na região da advecção negativa da vorticidade relativa o geopotencial tende a diminuir. Uma vez que as advecções de vorticidade são mais intensas nas regiões de inflexões, e são nulas nas cristas e cavados, a onda desloca-se para leste.

Esse mesmo tipo de argumento para o termo de advecção da vorticidade planetária nós mostra que a onda desloca-se para oeste.

Devemos lembrar que, em uma onda em amplificação as cristas e cavados tendem a ficar mais intensos com o tempo. Isto é, com o tempo, a altura geopotencial numa crista aumenta e num cavado diminui. Nos pontos de inflexão nenhum efeito é sentido, ou o geopotencial tende a permanecer não alterado com o tempo. Portanto, para diagnosticar o efeito de amplificação de uma onda, devemos avaliar as tendências do geopotencial nas regiões de cristas e cavados.

Em uma onda que se propaga de oeste para leste, o geopotencial tende a aumentar a leste da crista e diminuir a oeste. Portanto, a tendência nas cristas e cavados é nula. Todavia, as tendências nos pontos de inflexão são máximas. Por esta razão, para diagnosticar o movimento de uma onda devemos avaliar as tendências nos pontos de inflexão.

O mecanismo principal de amplificação ou decaimento de uma onda sinótica de latitudes médias está expresso pelo segundo termo do lado direito da equação de tendência, Equação 6.16 ou 6.17 que é a taxa de variação com altura da advecção térmica. Em geral, a advecção térmica é grande próximo à superfície, onde se encontram maiores gradientes horizontais de temperatura, do que nos altos níveis. Em uma onda baroclínica em desenvolvimento (Figura 6.2), estas advecções têm máximas magnitudes diretamente abaixo das cristas e cavados em 500 hPa. A oeste da baixa (centro de baixa pressão em superfície) a advecção é fria, e a leste da baixa a advecção é quente. Em níveis altos as advecções são desprezíveis. Na região de advecção fria.

$$- \mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p) < 0, \text{ portanto}$$

$$(\partial/\partial p)[\mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)] < 0 \text{ na região de cavado em 500 hPa.}$$

Isso implica que, na equação de tendência,  $\nabla^2\chi > 0$ , o que por sua vez significa que  $\chi < 0$ . Ou, o geopotencial deve decair com o tempo. Isto é, o cavado em 500 hPa aprofunda ou intensifica. Na região de advecção de ar quente ocorre que a crista em 500 hPa torna-se mais intensa devido ao aumento do geopotencial. Então, a onda se amplifica.

### 6.7. Equação de vorticidade potencial quasigeostrófica

A equação de tendência quasigeostrófica 6.16 pode ser facilmente escrita na forma de uma equação de conservação. O segundo termo do lado direito da equação pode ser escrito

$$-(\partial/\partial p)[-(f_0^2/\sigma)\mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)] = -[\mathbf{V}_g \cdot \nabla(\partial/\partial p)(\{f_0^2/\sigma\}\{\partial\Phi/\partial p\}) + (f_0^2/\sigma)(\partial\mathbf{V}_g/\partial p) \cdot \nabla(\partial\Phi/\partial p)].$$

O segundo termo do lado direito é nulo porque vento térmico  $(\partial\mathbf{V}_g/\partial p)$  é perpendicular ao gradiente térmico  $\nabla(\partial\Phi/\partial p)$ . Portanto

$$-(\partial/\partial p)[-(f_0^2/\sigma)\mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)] = -[\mathbf{V}_g \cdot \nabla(\partial/\partial p)(\{f_0^2/\sigma\}\{\partial\Phi/\partial p\})].$$

Usando esse resultado na equação da tendência podemos escrever

$$[\nabla^2 + (\partial/\partial p)\{f_0^2/\sigma\}(\partial/\partial p)]\chi = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla[(1/f_0)\nabla^2\Phi + f - (\partial/\partial p)(f_0^2/\sigma)(\partial\Phi/\partial p)]$$

Designando

$$q \equiv [(1/f_0)\nabla^2\Phi + f - (\partial/\partial p)(f_0^2/\sigma)(\partial\Phi/\partial p)], \text{ tem-se-á} \tag{6.18}$$

$$D_g q/Dt = 0 \tag{6.19}$$

$$\text{onde } D_g/Dt \equiv (\partial/\partial t + \mathbf{V}_g \cdot \nabla)$$

Esta equação significa que a quantidade  $q$  é conservada seguindo o movimento geostrófico.  $q$  é chamada vorticidade potencial quasigeostrófica.

O primeiro termo da Equação 6.18 é a vorticidade relativa geostrófica, o segundo termo é a vorticidade planetária (ou parâmetro de Coriolis) e o terceiro termo é a vorticidade de “esticamento”. Este último pode ser escrito

$$(\partial/\partial p)(f_0^2/\sigma)(\partial\Phi/\partial p) = -Rf_0(\partial/\partial p)(T/S_p)$$

onde  $S_p \equiv -T(\partial \ln \theta / \partial p)$  é um parâmetro de estabilidade estática.

$$-Rf_0(\partial/\partial p)(T/S_p) \approx -(f_0/S_p) (\partial T/\partial p)$$

Onde desconsideramos a variação do  $S_p$  com  $p$ . Se uma coluna atmosférica é esticada verticalmente para conservar a temperatura potencial das parcelas que compõe a coluna (principalmente o topo e a base da coluna), Figura 6.4, a variação vertical da temperatura  $\partial T/\partial p$  muda, e para compensar esta mudança a vorticidade relativa e ou planetária precisa mudar, para conservar  $q$ .

A Equação 6.19 pode ser utilizada para previsão. Nota-se que, se  $\mathbf{V}_g$  é paralelo às isolinhas de  $q$  em todo o domínio, a advecção geostrófica da  $q$  é nula. Neste caso o escoamento permanecerá sem mudanças.

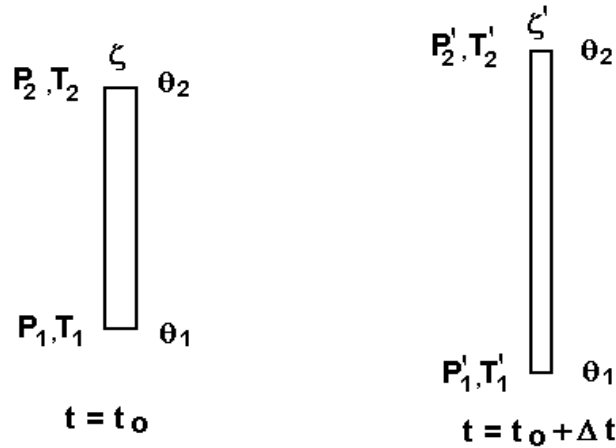


Figura 6.4: Efeito dos esticamento na conservação da vorticidade potencial.

### 6.8. Diagnóstico do movimento vertical

Eliminando  $\chi$  entre as Equações 6.14 e 6.15 (para processos adiabáticos) tem-se-á

$$[\nabla^2 + (f_0^2/\sigma)(\partial^2/\partial p^2)]\omega = (f_0/\sigma)(\partial/\partial p)\mathbf{V}_g \cdot \nabla(\{1/f_0\}\nabla^2\Phi + f) + (1/\sigma)\nabla^2[\mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)]. \quad (6.20)$$

Esta equação é diagnóstica e é chamada “equação Omega”. Esta equação permite a avaliação do movimento vertical sem precisar do vento ageostrófico. Ela não precisa da informação sobre a tendência da vorticidade ou de térmica. Somente informações de  $\Phi$  em um dado instante (mais as condições de contorno) são suficientes para determinar o campo de  $\omega$ .

O primeiro termo do lado direito é advecção diferencial da vorticidade absoluta geostrófica, e o segundo termo é Laplaciano da advecção térmica. O lado esquerdo da equação é um tipo de Laplaciano tridimensional e tende a espalhar os efeitos dos forçantes no espaço.

Para uma discussão qualitativa da equação vamos assumir a seguinte estrutura para o campo de  $\omega$ .

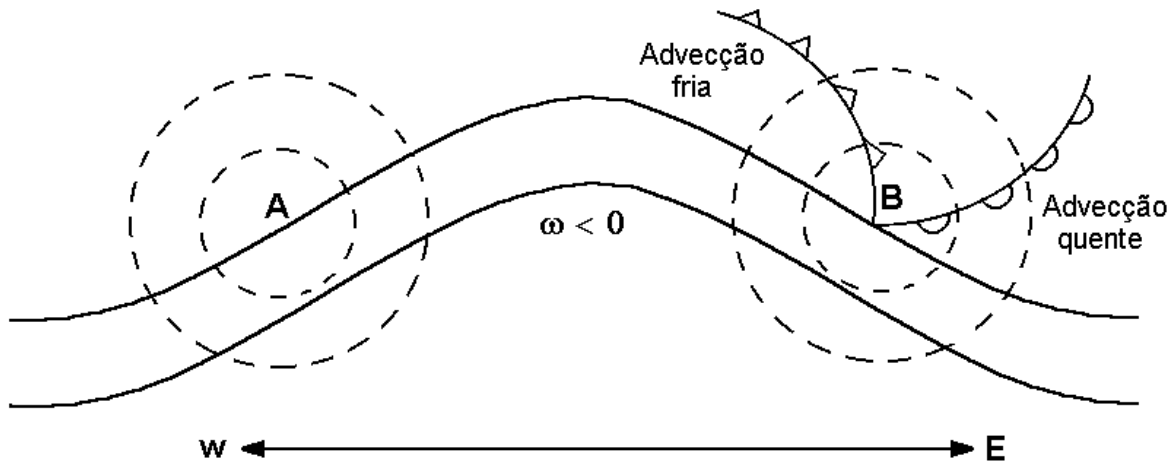
$$\omega = W_0 \text{sen}(\pi p/p_0) \text{sen}kx \text{sen}ly.$$

A estrutura é senoidal nas três dimensões,  $x, y, p$ . Na vertical em particular  $\omega$  é nula em  $p = p_0$  (superfície) e em  $p = 0$  (topo da atmosfera), com máxima amplitude na média troposfera. Nesse caso podemos escrever

$$[\nabla^2 + \{f_0^2/\sigma\}(\partial^2/\partial p^2)]\omega \propto -[k^2 + l^2 + (1/\sigma)(f_0\pi/p_0)^2]\omega \propto -\omega.$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 6.20 é proporcional à taxa de aumento da advecção de vorticidade absoluta. Considere a Figura 6.4 na qual as linhas contínuas são linhas de  $\Phi = \text{constante}$  em 500 hPa e as linhas tracejadas são as isóbaras no nível de mar

(ou linhas de  $\Phi = \text{constante}$  em 1000 hPa). As frentes estão mostradas com símbolos tradicionais.



**Figura 6.5:** Onda sinótica de latitudes médias do Hemisfério Sul em desenvolvimento.

A e B são os centros de alta e baixa pressão, respectivamente. As frentes fria e quente que emanam do centro de baixa pressão na superfície são marcadas na figura. As advecções de vorticidade nos centros A e B são pequenas ou nulas (porque as vorticidades e os ventos são fracos na superfície, e nos centros de pressão os gradientes de vorticidade são nulos). Mas em 500 hPa as advecções são fortes. A advecção é ciclônica sobre a região de L e é anticiclônica sobre a região de A. Considerando  $\sigma > 0$  e  $f < 0$  (HS), sobre A na Figura 6.4, o primeiro termo ao lado direito é negativo. Isso significa que  $\omega > 0$  e portanto  $w < 0$ , ou movimento descendente.

Do mesmo modo uma análise na região B mostra movimentos ascendentes ( $\omega < 0$ ). Isto é, em um sistema sinótico de latitudes médias em desenvolvimento, movimentos ascendentes ocorrem na vanguarda do cavado em 500 hPa, e portanto estas regiões apresentam tempo significativo (nebulosidade e chuva).

O segundo termo do lado direito é o Laplaciano de advecção térmica. Sob efeito deste termo, no HS, tem-se

$$w \propto \nabla^2 [\mathbf{V}_g \cdot \nabla (-\partial\Phi/\partial p)] \propto -\mathbf{V}_g \cdot \nabla (-\partial\Phi/\partial p)$$

Nas regiões de advecção quente (ou máximo de advecção quente) o movimento é ascendente,  $w > 0$ . Portanto, movimentos ascendentes ocorrem, pelo efeito deste termo, na região ao nordeste do L. Movimentos descendentes ocorrem um pouco ao norte, debaixo do cavado em 500 hPa.

Os movimentos verticais determinadas pela teoria quasigeostrófica são aqueles que asseguram que as mudanças na vorticidade são geostróficas e as mudanças na temperatura são hidrostáticas.

### 6.9. Equação Omega em termos de vetor Q

Os termos do lado direito da equação Omega (6.20) representam processos físicos bem interpretáveis. Mas, na prática, os termos possuem um cancelamento entre eles. Ou, uma parte de um termo se cancela com uma parte do outro termo. Podemos notar também que os termos não são invariantes com respeito à transformação da coordenada zonal. Isto é, adicionando uma velocidade zonal constante para o escoamento os dois termos sofrem mudanças na magnitude. (Entretanto a soma deles não muda.) Estas características reduzem a precisão de cálculo numérico da  $\omega$ . Por estas razões uma formulação alternativa da equação Omega foi desenvolvida por Hoskins.

Para simplificar o tratamento matemático, vamos considerar o caso em que  $\beta = 0$ . isto é, consideramos plano  $f$ . Neste caso, as equações de movimento e energia termodinâmica são

$$D_g u_g / Dt - f_o v_a = 0 \quad (6.21)$$

$$D_g v_g / Dt + f_o u_a = 0 \quad (6.22)$$

$$D_g T / Dt - S_p \omega = 0 \quad (6.23)$$

Estas equações são acopladas pelas relações do vento térmico

$$p(\partial u_g / \partial p) = (R/f_o)(\partial T / \partial y) \text{ e } p(\partial v_g / \partial p) = -(R/f_o)(\partial T / \partial x)$$

Agora, eliminando a derivada em tempo entre 6.21 e 6.23 e usando a relação de vento térmico tem-se-á:

$$\sigma(\partial \omega / \partial y) - f_o^2 (\partial v_a / \partial p) = -2Q_2 \quad (6.24)$$

Do mesmo modo através das Equações 6.22 e 6.23 pode-se obter

$$\sigma(\partial \omega / \partial x) - f_o^2 (\partial u_a / \partial p) = -2Q_1 \quad (6.25)$$

onde

$$Q_1 \equiv -(R/p)[(\partial u_g / \partial x)(\partial T / \partial x) + (\partial v_g / \partial x)(\partial T / \partial y)] = -(R/p)(\partial \mathbf{V}_g / \partial x) \cdot \nabla T$$

$$Q_2 \equiv -(R/p)[(\partial u_g / \partial y)(\partial T / \partial x) + (\partial v_g / \partial y)(\partial T / \partial y)] = -(R/p)(\partial \mathbf{V}_g / \partial y) \cdot \nabla T$$

Obtendo a derivada com respeito a  $x$  da Equação 6.25 e a derivada com respeito a  $y$  da Equação 6.24, somando as equações resultantes e usando a equação de continuidade tem-se-á :

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_o^2 (\partial^2 \omega / \partial p^2) = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (6.26)$$

onde



$$\mathbf{Q} \equiv (Q_1 \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j}) = - (R/p) \{ (\partial \mathbf{V}_g / \partial x) \cdot \nabla T \mathbf{i} + (\partial \mathbf{V}_g / \partial y) \cdot \nabla T \mathbf{j} \}$$

Equação 6.26 mostra que, no plano  $f$ , o movimento vertical é forçado pela convergência do vetor  $\mathbf{Q}$ . Esta equação não possui termos forçantes que se cancelam. As regiões de convergência do vetor  $\mathbf{Q}$  correspondem aos movimentos verticais para cima e nas regiões de divergência ocorrem movimentos descendentes.

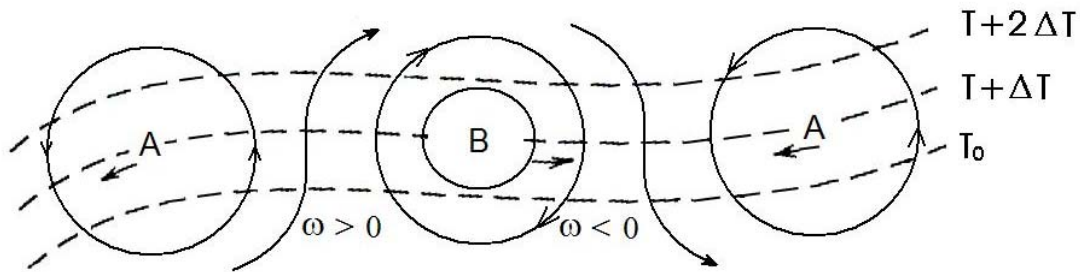
Uma das grandes vantagens da formulação 6.26 é que a informação de  $T$  e  $\mathbf{V}_g$  (ou equivalentemente  $\Phi$ ) sobre uma única superfície isobárica é suficiente para avaliar o vetor  $\mathbf{Q}$  e  $\omega$  naquele nível. O uso do vetor  $\mathbf{Q}$ , todavia, não é imediato. Para uma análise heurística vamos referir o movimento às coordenadas cartesianas nas quais o eixo  $x$  fica paralelo a isoterma no sentido de ter ar frio a direita do  $x$  no HS, e o eixo  $y$  aponta para a esquerda do eixo  $x$ , isto é, o eixo  $y$  aponta para o ar quente. Neste caso

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= - (R/p) (\partial T / \partial y) \{ (\partial v_g / \partial x) \mathbf{i} + (\partial v_g / \partial y) \mathbf{j} \} = - (R/p) (\partial T / \partial y) \{ (\partial v_g / \partial x) \mathbf{i} - (\partial u_g / \partial x) \mathbf{j} \} \\ &= (R/p) \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \{ \mathbf{k} \times (\partial \mathbf{V}_g / \partial x) \} \end{aligned}$$

Com esta expressão podemos avaliar o vetor  $\mathbf{Q}$  com facilidade, examinando a variação vetorial do vento ao longo das isotermas.

### 6.10. Situações sinóticas e vetor $\mathbf{Q}$

Um exemplo de situação sinótica das latitudes médias é uma família de centros de pressão, alta, baixa, alta, etc. alinhados zonalmente conforme a figura esquemática 6.6.



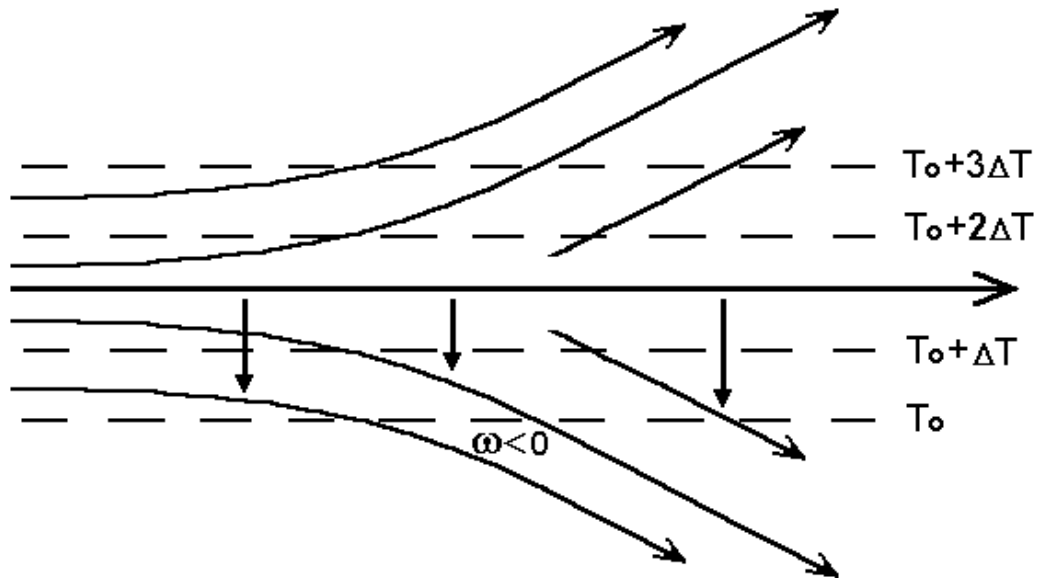
**Figura 6.6:** Centros de pressão alinhados zonalmente e vetores  $\mathbf{Q}$  associados.

As linhas cheias são as isóbaras (ou isolinhas de  $\Phi$ ) e as linhas quebradas são as isotermas. Nesse caso, no centro de baixa pressão  $\partial \mathbf{V}_g / \partial x$  aponta para o sul. (A variação do vetor  $\mathbf{V}_g$  com  $x$  é obtida subtraindo o  $\mathbf{V}_g$  a oeste do local considerado do  $\mathbf{V}_g$  a leste.) Portanto,  $\mathbf{k} \times \partial \mathbf{V}_g / \partial x$  aponta para leste, isto é, o vetor  $\mathbf{Q}$  aponta para leste no centro de baixa pressão. No centro de alta pressão ele aponta para o oeste. Com isso, podemos verificar que a leste do centro de baixa pressão (ou a oeste do centro de alta pressão) tem-se convergência do vetor  $\mathbf{Q}$ . Isso significa que os movimentos nesta região são ascendentes. Do

mesmo modo verificamos que a oeste do centro de baixa pressão ou a leste do centro de alta pressão tem-se movimentos descendentes.

Um outro exemplo interessante é a saída do jato. Os jatos do ar superior se apresentam sobre regiões de elevados gradientes horizontais de temperatura. Todavia, os ventos máximos apresentam núcleos que se estendem alguns milhares de *km*. Esses núcleos são chamados “jetstreaks” em inglês. A parte corrente abaixo do centro do “jetstreak” é a saída do jato. A outra parte é a entrada do jato. Uma entrada do jato orientada de oeste para leste no HS é esquematizada na Figura 6.7.

As linhas cheias são linhas de corrente e as linhas quebradas são as isotermas no ar superior (média ou altas troposfera). Notamos que as linhas de corrente são confluentes nesta região. Ao longo do eixo do jato a magnitude do vento aumenta para leste (isto é, com *x*). Portanto,  $\partial V_g / \partial x$  aponta para leste, e  $\mathbf{k} \times \partial V_g / \partial x$  e portanto vetores  $\mathbf{Q}$  apontam para o norte. Se considerarmos que os vetores  $\mathbf{Q}$  longe do eixo do jato são fracos ou nulos, inferimos que tem-se convergência do vetor  $\mathbf{Q}$  e, portanto, movimentos ascendentes ao norte do eixo do jato na região da entrada do jato. Ao sul do eixo do jato tem-se movimentos descendentes.



**Figura 6.7:** Esquemática da saída do jato no Hemisfério Sul e os vetores  $\mathbf{Q}$  associados.

# Capítulo 7

## 7.1. Oscilações atmosféricas: Perturbações lineares

Perturbações atmosféricas apresentam características ondulatórias. É difícil obter uma visão física clara dos processos responsáveis pelas características, através de equações não lineares que precisam de métodos numéricos para solucioná-las. Métodos de pequenas perturbações devem ser empregados para avaliar, com alguma facilidade, os movimentos ondulatórios. Nesse método as variáveis de campo (variáveis dependentes) são separadas em duas partes: uma parte que descreve o estado básico, que é normalmente suposta independente de tempo e longitude, e a outra parte é a perturbação, que é o desvio a partir do estado básico. Por exemplo

$$u(x, t) = \bar{u} + u'(x, t); T(x, t) = \bar{T} + T'(x, t) \quad (7.1)$$

Neste caso o termo de advecção na equação de termodinâmica pode ser escrito

$$\begin{aligned} u\partial T/\partial x &= (\bar{u} + u')\partial(\bar{T} + T')/\partial x \\ &= \bar{u}(\partial/\partial x)\bar{T} + \bar{u}(\partial/\partial x)T' + u'(\partial/\partial x)\bar{T} + u'(\partial/\partial x)T' \end{aligned} \quad (7.2)$$

Mas, pela definição dos campos do estado básico

$$(\partial/\partial x)\bar{T} = 0 \quad (7.3)$$

Portanto

$$u\partial T/\partial x = \bar{u}(\partial/\partial x)T' + u'(\partial/\partial x)T' \quad (7.4)$$

As suposições básicas da teoria de perturbações pequenas são: o estado básico satisfaz as equações governantes, e as perturbações são pequenas para tornar os seus produtos desprezíveis tal que

$$|\bar{u}(\partial/\partial x)T'| \gg |u'(\partial/\partial x)T'| \quad (7.5)$$

Quando os produtos de perturbações são desprezados, as equações são reduzidas para equações lineares. Estas equações lineares podem ser solucionadas pelos métodos padrões de integração de equações diferenciais parciais. Em caso de equações diferenciais com coeficientes constantes, as soluções são senoidais ou exponenciais.

## 7.2. Movimentos ondulatórios e oscilatórios

Uma oscilação que apresenta diferentes fases em diferentes posições e se propaga no espaço é um movimento ondulatório. Um exemplo clássico de movimento oscilatório é oscilador harmônico. É importante notar que, nesses movimentos, a velocidade de

propagação e a periodicidade são independentes da amplitude da oscilação. Como exemplo vamos considerar as oscilações de um pêndulo simples, composto de uma corda ideal (i. é. sem massa) amarrada numa das suas pontas num suporte no teto da sala e um peso amarrado na outra ponta da corda. Veja a Figura 7.1.



**Figura 7.1:** Pêndulo simples.

A equação que governa o ângulo  $\theta$  entre o vertical e a corda do pêndulo é governado por

$$d^2\theta/dt^2 + v^2\theta = 0 \quad (7.6)$$

onde  $v^2 = g/l$  na qual  $l$  é o comprimento do pêndulo e  $g$  é a aceleração de gravidade. A equação tem como solução geral

$$\theta(t) = \theta_1 \cos vt + \theta_2 \sin vt = \theta \cos (vt - \alpha) \quad (7.7)$$

onde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$  são constantes e poderão ser determinados pelas condições iniciais.  $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$  é amplitude e  $\phi = (vt - \alpha)$  é a fase de oscilação.  $\alpha$  é dada por  $\text{tg}^{-1}(\theta_1/\theta_2)$ .

Ondas progressivas também podem ser caracterizadas por uma amplitude e uma fase. Uma onda unidimensional que propaga em  $x$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(x, t) = A \cos (kx - vt - \alpha) \quad (7.8)$$

onde  $k$  é número de onda dado por  $k = 2\pi/L_x$ , onde  $L_x$  é comprimento de onda (a distância entre duas cristas ou dois cavados consecutivos). Neste caso

$$\phi = (kx - vt - \alpha) \quad (7.9)$$

é a fase. Um observador que se desloca com a onda sempre está na mesma fase de onda. Portanto para o observador  $\phi = (kx - vt - \alpha) = \text{constante}$ . Assim sendo, a velocidade de fase é dada por

$$c_x = (dx/dt)_{(\phi = \text{constante})} = v/k \quad (7.10)$$

Da mesma forma, ondas progressivas tridimensionais são expressas do seguinte modo:

$$F(x, y, z, t) = A \cos (kx + ly + mz - vt - \alpha) \tag{7.11}$$

Onde  $l, m$  são números de onda nas direções  $y, z$ , respectivamente, e são dados por  $l = 2\pi/L_y, m = 2\pi/L_z$ , na qual  $L_y, L_z$  são comprimentos de onda nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente. As velocidades de fase são dadas por

$$c_x = v/k, c_y = v/l, c_z = v/m. \tag{7.12}$$

A onda tridimensional dada pela Equação 7.10 pode ser escrita da seguinte forma alternativa

$$F(x, y, z, t) = A \cos (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - vt - \alpha) \tag{7.13}$$

onde  $\mathbf{K} = \mathbf{i}k + \mathbf{j}l + \mathbf{k}m$  é o número de onda vetor e  $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$  é o vetor de posição.

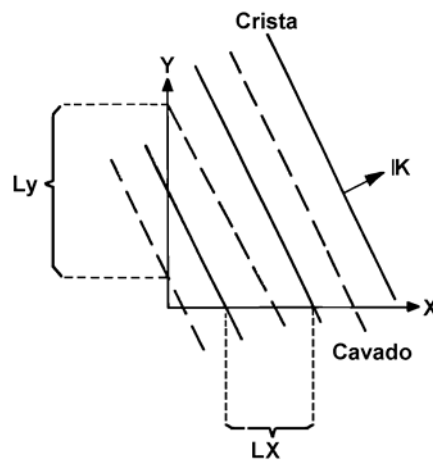


Figura 7.2: Onda plana.

### 7.3. Série de Fourier

Qualquer função de longitude,  $f(x)$ , “bem comportada” pode ser expressa como um somatório de uma série infinita de funções senos e cossenos da seguinte maneira:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} (A_s \text{ sen } k_s x + B_s \text{ cos } k_s x) \tag{7.14}$$

$f(x)$  representa uma onda unidimensional estacionária ou a estrutura da onda progressiva em um dado instante. Entretanto,

$$H_s = (A_s \text{ sen } k_s x + B_s \text{ cos } k_s x) \tag{7.15}$$

é chamado  $s$ -ésimo harmônico, na qual  $k_s = 2\pi s/L$  é o número de onda e  $L$  é a circunferência do círculo de latitude,  $\varphi$ ,  $x = a \cos\varphi$   $\lambda$  é a distância ao longo do círculo medida a partir de  $\lambda = 0$  (meridiano de Greenwich) e  $a$  é o raio da Terra.

$A_n$  pode ser determinada multiplicando a Equação 7.13 por  $\text{sen}(2\pi n x/L)$  onde  $n$  é inteiro, e integrando sobre toda a circunferência do círculo de latitude. Isto é,

$$A_s = (2/L) \int_0^L f(x) \text{sen}(2\pi s x/L) dx \quad (7.16)$$

Do mesmo modo

$$B_s = (2/L) \int_0^L f(x) \text{cos}(2\pi s x/L) dx \quad (7.17)$$

Para obter as Equações 7.15 e 7.16 usamos as relações de ortogonalidade das funções senoídeais:

$$\begin{aligned} \int_0^L \text{sen}(2\pi n x/L) \text{cos}(2\pi s x/L) dx &= 0 \\ \int_0^L \text{sen}(2\pi n x/L) \text{sen}(2\pi s x/L) dx &= 0 \text{ para } s \neq n \\ \int_0^L \text{sen}(2\pi n x/L) \text{sen}(2\pi s x/L) dx &= L/2 \text{ para } s = n \\ \int_0^L \text{cos}(2\pi n x/L) \text{cos}(2\pi s x/L) dx &= 0 \text{ para } s \neq n \\ \int_0^L \text{cos}(2\pi n x/L) \text{cos}(2\pi s x/L) dx &= L/2 \text{ para } s = n \end{aligned} \quad (7.18)$$

$A_s$  e  $B_s$  são chamados “coeficientes de Fourier”.

Nota-se que

$$H_s = (A_s \text{sen } k_s x + B_s \text{cos } k_s x) = \text{Re}[C_s \exp(i k_s x)] \quad (7.19)$$

onde  $B_s = \text{Re}(C_s)$ ,  $A_s = -\text{Im}(C_s)$ . Portanto a série de Fourier pode ser escrita

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp(i 2\pi n x/L) \quad (7.20)$$

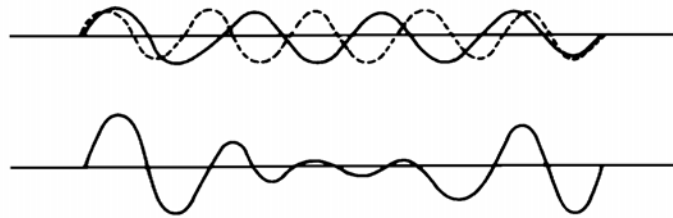
onde  $C_n = (A_n - i B_n)/2$  e  $C_{-n} = (A_n + i B_n)/2$ .

#### 7.4. Dispersão e velocidade de grupo

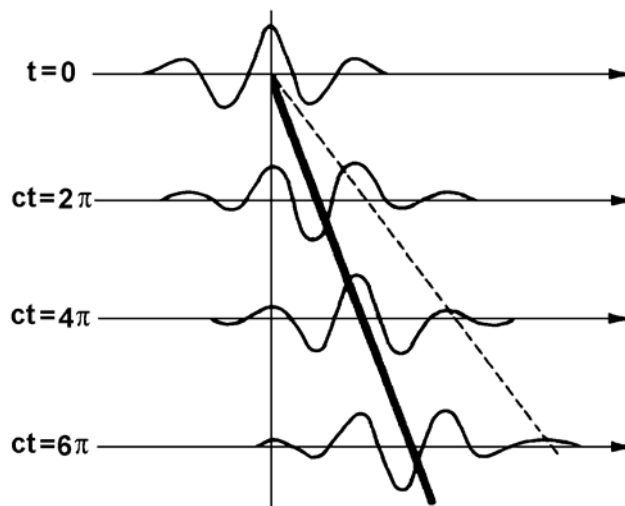
Para o oscilador linear  $v$  depende somente das características físicas do oscilador, do comprimento do pêndulo e da aceleração de gravidade. Todavia, para ondas progressivas  $v$  também depende, em geral, do número (ou comprimento) de onda. Isso significa que  $c = v/k$  também depende do número de onda, exceto no caso de  $v \propto k$ . Em geral, perturbações na atmosfera são compostas de várias ondas senoídeais (ou harmônicos) ou vários componentes de Fourier, cada um com o seu  $k_s$ . Perturbações ou ondas progressivas em que a velocidade de fase dos seus componentes harmônicos depende do número (ou comprimento) de onda são dispersivas.

A relação entre  $v$  e  $k$  é chamada relação de dispersão. No caso especial de  $c$  depender do  $k$  a onda é não dispersiva. Onda não dispersiva preserva a sua forma e se propaga no espaço com a velocidade de fase. Um exemplo disso é onda acústica. Para um dado meio todos os comprimentos de onda sonora se propagam com a mesma velocidade de fase. (Se não fosse seria um desastre!!)

Para ondas dispersivas, a forma da perturbação não permanece constante à medida que a onda se propaga no espaço. Ilustrações gráficas de uma perturbação formada por um grupo de ondas senoidais e sua propagação no espaço são mostradas nas Figuras 7.3 e 7.4.



**Figura 7.3:** Grupo de ondas formadas pelos componentes senoidais.



**Figura 7.4:** Propagação do grupo de ondas.

Considera-se uma combinação de duas ondas senoidais de amplitudes iguais e números de onda  $k+\delta k$  e  $k-\delta k$  e frequências  $v+\delta v$  e  $v-\delta v$ , respectivamente, e que se propagam na direção  $x$ . A perturbação é matematicamente dada por

$$\psi(x, t) = \exp [i(k+\delta k)x - (v+\delta v)t] + \exp [i(k-\delta k)x - (v-\delta v)t] \tag{7.21}$$

onde a notação “Re” foi omitida. A expressão pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\psi(x, t) = \{ \exp [i(\delta kx - \delta vt)] + \exp [-i(\delta kx - \delta vt)] \} \{ \exp [i(kx-vt)] \}$$

$$= 2 \cos(\delta kx - \delta vt) \exp [i(kx - vt)]. \quad (7.22)$$

Podemos notar que a perturbação é um produto de uma onda de alta frequência chamada “onda carregador” de comprimento de onda  $2\pi/k$  e velocidade de fase de  $v/k$ , e uma onda de baixa frequência chamada “onda envelope” de comprimento de onda  $2\pi/\delta k$  que se propaga com a velocidade  $\delta v/\delta k$ .

$$\text{No limite } \delta k \rightarrow 0, \delta v/\delta k \rightarrow \partial v/\partial k \equiv c_g. \quad (7.23)$$

$c_g$  é chamada “velocidade de grupo”. Este resultado é válido para envelopes de grupos de ondas arbitrários desde que  $2\pi/\delta k$  é maior que  $2\pi/k$ , onde  $k$  é o número de onda dominante. É importante notar que a energia da perturbação se propaga com a velocidade de grupo.

### 7.5. Onda plana e nomenclatura

Uma onda senoidal progressiva em três dimensões composta de um único harmônico com amplitude unitária pode ser escrita

$$f_{k,l,m}(x, y, z, t) = \exp [i(kx + ly + mz - vt)] = \exp [i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - vt)]. \quad (7.24)$$

Em um dado instante, i.é.,  $t = t_0 = \text{constante}$ , a fase desta onda é dada por  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = kx + ly + mz = \text{constante}$ . Esta equação, para  $k, l, m$  constantes, representa um plano em três dimensões. Isto é, as superfícies de fase constante são planas. Por esta razão a onda representada pela Equação 7.24 é chamada “onda plana”.

Onda estacionária :  $v = 0$ , o que significa que a velocidade da fase de onda (e do grupo também) é nula, ou a onda permanece estacionária. Neste caso, as cristas e cavados (ou centros de máximos e mínimos) permanecem estacionários a respeito da Terra. Ondas geradas pelos obstáculos permanentes como cadeias de montanhas, são aproximadamente desta natureza. (A posição de cavados e cristas gerados pelas montanhas mudam de suas posições conforme a intensidade e estrutura do escoamento. Mas, esta variação, de grosso modo, é pequena dentro de uma dada estação do ano.)

Oscilação simultânea : Para  $\mathbf{K} = 0$  a variável em questão não possui variabilidade espacial. A variável, porém, apresenta variabilidade temporal senoidal, o que é uma oscilação que ocorre em todo o domínio espacial simultaneamente.

Onda transversal : Em uma onda transversal oscilações das parcelas individuais do fluido (ou meio) ocorrem numa direção perpendicular à propagação da onda. Um exemplo disso são as ondas na superfície do mar. Nestas ondas as parcelas oscilam na vertical, enquanto as cristas e os cavados propagam-se na horizontal.

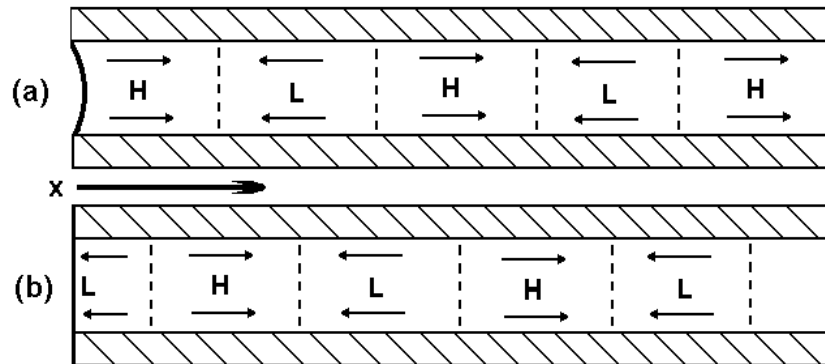
Onda longitudinal : Em uma onda longitudinal oscilações das parcelas individuais do fluido (ou meio) ocorrem na mesma direção da propagação da onda. Um exemplo disso são as ondas sonoras (ou acústicas), nas quais as parcelas do meio oscilam na mesma direção da propagação da onda.



No que segue fica evidente que o conjunto de equações (de movimento, continuidade, termodinâmica) desenvolvido nos capítulos anteriores permitem diversos tipos de ondas, desde ondas sonoras até ondas meteorológicas de escala sinótica.

### 7.6. Ondas sonoras ou acústicas

O som propaga-se pelas compressões e rarefações adiabáticas do meio. Considera-se aqui especificamente o caso da atmosfera terrestre. A Figura 7.5 do livro de Holton mostra um diagrama esquemático de propagação de ondas sonoras em um tubo cilíndrico no qual uma das extremidades (uma seção circular) é coberta com uma membrana flexível (ou diafragma). Se o diafragma é perturbado para vibrar, o ar adjacente será comprimido ou expandido conforme o movimento do diafragma seja para dentro ou para fora do tubo. A força de gradiente de pressão resultante é equilibrada pela aceleração oscilante. Esta aceleração causa um gradiente de pressão no ar adjacente que, por sua vez, vai causar aceleração, e assim sucessivamente. O resultado desse aumento e diminuição de pressão repetitivos são compressões e rarefações do fluido, as quais se propagam para dentro do tubo. As parcelas individuais não sofrem deslocamento líquido para dentro do tubo, mas o padrão de compressões e rarefações desloca-se para leste com a velocidade do som.



**Figura 7.5:** Esquemática da propagação de onda de som. H e L são regiões de alta pressão e baixa pressão, respectivamente.

Aqui aplica-se o método de perturbação (pequena) para ilustrar o problema de propagação de som em uma dimensão, ao longo de eixo  $x$ . Para excluir a possibilidade de ondas transversais assumimos que  $v = w = 0$ . Para simplificar ainda mais, eliminaremos toda a dependência da estrutura do escoamento nas direções  $y$  e  $z$ . Isto é,

$$u = u(x,t) ; v = w = 0.$$

Neste caso as equações governantes são

$$Du/Dt + (1/\rho) (\partial p/\partial x) = 0 \tag{7.25}$$

$$D\rho/Dt + \rho (\partial u/\partial x) = 0 \tag{7.26}$$

$$D(\ln\theta)/Dt = 0 \tag{7.27}$$

No qual  $D/Dt = (\partial/\partial t) + u(\partial/\partial x)$ ,  $\theta = (p/\rho R)(p_s/p)^{R/C_p}$  onde  $p_s = 1000$  hPa.

Eliminando  $\theta$  da Equação (7.26) e usando a definição da temperatura potencial tem-se

$$(1/\gamma)(D\ln p/Dt) - (D\ln \rho/Dt) = 0. \quad (7.28)$$

onde  $\gamma = C_p/C_v$  é a razão entre calores específicos à pressão e a volume constantes, respectivamente. Eliminando  $\rho$  entre Equações (7.26) e (7.28) tem-se

$$(1/\gamma)(D\ln p/Dt) - \partial u/\partial x = 0 \quad (7.29)$$

Agora escrevem-se as variáveis como combinações de um estado básico e uma perturbação, da seguinte maneira:

$$u(x, t) = \bar{u} + u'(x, t); p(x, t) = \bar{p} + p'(x, t); \rho(x, t) = \bar{\rho} + \rho'(x, t)$$

Após a substituição destas nas Equações (7.25) e (7.29) considera-se que  $|\rho'/\rho| \ll 1$ . Desprezando os produtos entre perturbações tem-se

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)u' + (1/\bar{\rho})(\partial p'/\partial x) = 0 \quad (7.30)$$

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)p' + (\gamma \bar{p})(\partial u'/\partial x) = 0 \quad (7.31)$$

Agora, eliminação de  $u'$  entre Equações (7.30) e (7.31) resultará

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)^2 p' + (\gamma \bar{p}/\bar{\rho})(\partial^2 p'/\partial x^2) = 0 \quad (7.32)$$

Esta equação governa as perturbações adiabáticas longitudinais no campo de pressão. Esta é uma equação linear que permite soluções senoidais. Suponhamos que a solução seja

$$p' = A \exp[ik(x-ct)] \quad (7.33)$$

na qual omitimos “Re”. Substituindo a suposta solução na Equação (7.32) obtém-se a condição de que a Equação (7.33) seja solução da Equação (7.32). Nota-se que

$$\partial p'/\partial t = -ikc p'; \partial p'/\partial x = ik p' \quad (7.34)$$

A condição é

$$(-ikc + ik \bar{u})^2 - (\gamma \bar{p}/\bar{\rho})(ik)^2 = 0$$

o que equivale

$$c = \bar{u} \pm (\gamma \bar{p}/\bar{\rho})^{1/2} = \bar{u} \pm (\gamma R \bar{T})^{1/2}. \quad (7.35)$$

Ressalta-se que (7.33) é a solução da (7.32) somente se (7.35) é satisfeita. A condição fornece a velocidade de ondas sonoras em termos dos parâmetros básicos do meio em que as ondas se propagam. A velocidade de propagação relativa ao escoamento básico é dada por

$$c = \pm (\gamma R \bar{T})^{1/2} \quad (7.36)$$

Nota-se primeiro que a onda pode se propagar em ambas as direções (veja o sinal  $\pm$ ). A velocidade do escoamento básico faz o papel de deslocamento Doppler da frequência da onda. É interessante notar que a velocidade de som depende da temperatura do meio, sendo maior para temperaturas maiores. A frequência é dada por

$$v = kc = k(u \pm c_s) \quad (7.37)$$

e é maior para observador corrente abaixo (e menor para observador corrente acima) da fonte sonora. Na (7.37)  $c_s$  é a velocidade de som relativo ao escoamento básico (ou a fonte sonora móvel).

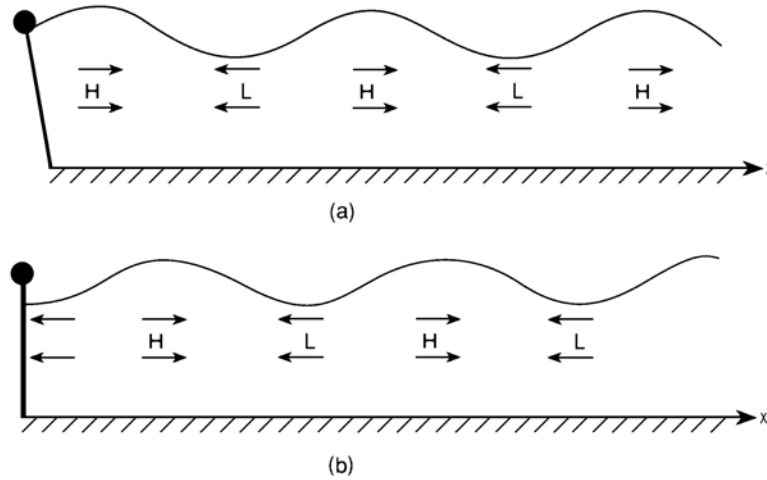
### 7.7. Ondas de gravidade de água rasa

Este tipo de ondas ocorrem somente quando existe uma superfície livre ou existe uma descontinuidade interna de densidade dentro do meio ou fluido. Por exemplo, água por baixo e óleo para cima num recipiente apresentam uma superfície interna de descontinuidade. As ondas de gravidade são transversas e a força restauradora é gravidade que atua na direção perpendicular à direção de propagação de ondas.

Considera-se um sistema de dois fluidos homogêneos e incompressíveis com densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$  como mostrado na Figura 7.6. A suposição de incompressibilidade exclui ondas de som e assim permite isolar as ondas de gravidade. A suposição de homogeneidade dos fluidos significa  $\rho_1$  e  $\rho_2$  constantes. Nesse caso a força de gradiente de pressão em cada uma das camadas dos fluidos é constante com altura. Podemos verificar isso diferenciando a equação hidrostática com respeito a  $x$ :

$$(\partial/\partial x)(\partial p/\partial z) = -(\partial/\partial x)(\rho g) = -g(\partial\rho/\partial x) = 0, \text{ e}$$

$$(\partial/\partial z)(\partial p/\partial x) = 0.$$

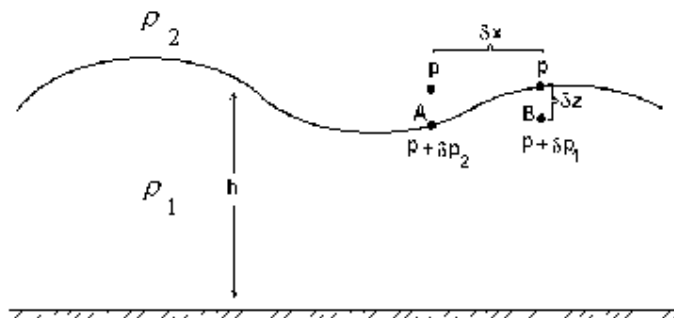


**Figura 7.6:** Propagação das ondas de gravidade na superfície. H e L são regiões de alta pressão e baixa pressão, respectivamente.

Considera-se também um escoamento uniforme em  $y$ . Com isso o problema simplifica para duas dimensões:  $x, z$ . Para simplificar ainda mais assume-se que a força de gradiente de pressão é nula na camada de cima (no óleo, por exemplo). A força de gradiente de pressão na cama de baixo pode ser obtida de seguinte forma. Integrando a equação hidrostática na vertical da base até a interface nos dois pontos vizinhos A e B, marcados na Figura 7.7, separados de uma distância  $\delta x$ , tem-se o gradiente de pressão no fluido inferior como:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \{(p+\delta p_1)-(p+\delta p_2)\} / \delta x = g \delta \rho (\partial h / \partial x)$$

onde  $\delta \rho = \rho_1 - \rho_2$  é a diferença de densidades dos fluidos, e  $h(x, t)$  é a altura da interface entre os dois fluidos.



**Figura 7.7:** Um sistema de fluidos com duas camadas.

Ignorando os efeitos da rotação da Terra, a equação de movimento é dada por

$$\partial u / \partial t + u(\partial u / \partial x) + w(\partial u / \partial z) = -g(\delta \rho / \rho_1)(\partial h / \partial x). \quad (7.38)$$

A equação de continuidade (para fluido incompressível) é dada por

$$(\partial u / \partial x) + (\partial w / \partial z) = 0. \quad (7.39)$$

Uma vez que a força de gradiente de pressão é independente do  $z$ , a velocidade  $u$  também é independente da altura. Esta é uma das características de um escoamento barotrópico. A equação de continuidade pode ser integrada na vertical de  $z = 0$  a  $z = h$ , para obter

$$w(h) - w(0) = -h(\partial u / \partial x).$$

Mas,  $w(h) = Dh/Dt$ , e supondo que a superfície inferior é horizontal tem-se  $w(0) = 0$ . Com isso obtém-se

$$\partial h / \partial t + u(\partial h / \partial x) + h(\partial u / \partial x) = 0 \rightarrow \partial h / \partial t + \partial(uh) / \partial x = 0 \quad (7.40)$$

As duas Equações (7.38) e (7.40) formam um conjunto fechado de equações em duas variáveis dependentes  $u$  e  $h$ .

Agora aplica-se a técnica de perturbações (pequenas) para linearizar as equações. Assim

$$u = \bar{u} + u'; \quad h = H + h',$$

onde  $H$  é a altura da interface não perturbada. Introduzindo estas expressões nas equações e notando que  $|h'| \ll H$  e  $|u'| \ll \bar{u}$ , obtém-se as seguintes equações linearizadas:

$$\partial u' / \partial t + \bar{u}(\partial u' / \partial x) + g(\delta \rho / \rho_1)(\partial h' / \partial x) = 0 \quad (7.41)$$

$$\partial h' / \partial t + \bar{u}(\partial h' / \partial x) + H(\partial u' / \partial x) = 0 \quad (7.42)$$

Eliminando  $u'$  entre as duas equações tem-se

$$[(\partial / \partial t) + \bar{u}(\partial / \partial x)]^2 h' - (gH)(\delta \rho / \rho_1)(\partial^2 h' / \partial x^2) = 0. \quad (7.43)$$

Supõe-se a solução

$$h' = A \exp[ik(x-ct)].$$

Neste caso, a velocidade de fase deve satisfazer a condição

$$c = \bar{u} \pm (gH\delta \rho / \rho_1)^{1/2} \quad (7.44)$$

Se a camada superior do sistema de fluidos é ar e a camada inferior é a água, tem-se  $\delta\rho \approx \rho_1$ . Com isso a velocidade de propagação das ondas de gravidade na superfície oceânica torna-se

$$c = \bar{u} \pm (gH)^{1/2}. \quad (7.45)$$

Esta é a velocidade de ondas de água rasa e é válida para comprimentos de onda bem maiores que a profundidade do oceano. Por exemplo, se a profundidade do oceano é aproximadamente 4 km (4000 m) a velocidade de propagação de ondas de gravidade iguala  $200 \text{ ms}^{-1}$ . Isto é, ondas longas na superfície oceânica propagam muito rapidamente. Todavia, ondas com comprimentos maior que 4 km não são excitadas pelos ventos. Ondas de gravidade podem ser excitadas na interface de descontinuidade entre água fria e densa abaixo e a camada de água quente e leve acima. Esta interface, onde de fato ocorrem fortes gradientes de densidade, é chamada “termoclina” e localiza-se numa profundidade de  $\sim 1$  km abaixo da superfície livre. A relativa diferença de densidade,  $\delta\rho/\rho$ , próximo a termoclina pode ter uma ordem de magnitude de 0,01. Neste caso a velocidade de propagação de ondas de gravidade é dez vezes menor que a velocidade na superfície. Isto é as ondas de gravidade próximo a termoclina oceânica propagam com a velocidade de aproximadamente  $10 \text{ ms}^{-1}$ .

## 7.8. Ondas de Rossby

Onda de Rossby é a onda mais importante para os processos meteorológicos de larga escala. Em um fluido barotrópico sem atrito (ou fluido inviscido) de uma profundidade constante a onda de Rossby é movimento ondulatório que conserva a vorticidade absoluta. Sua existência se deve a variação de força de Coriolis com latitude. Este é chamado efeito  $\beta$ . Em uma atmosfera isentrópica o movimento ondulatório de Rossby conserva vorticidade potencial e sua existência se deve a variação da vorticidade potencial isentrópica.

Considera-se uma corda de parcelas de fluido inicialmente alinhadas ao longo de um círculo de latitude. Assume-se que inicialmente a vorticidade relativa é nula. Isto é,  $\zeta_i = 0$  em  $t = t_0$ . Supõe-se que em  $t = t_1$  a corda terá, localmente, uma perturbação meridional  $\delta y$ . Nesse local  $(\zeta+f)_{t1} = f_{t0} \rightarrow \zeta_{t1} = f_{t0} - f_{t1} = -\beta\delta y$ , onde  $\beta = \partial f / \partial y$ . Considerando Hemisfério Sul, se o deslocamento for para norte  $\zeta_{t1} < 0$ , isto é vorticidade ciclônica. Se o deslocamento for para sul  $\zeta_{t1} > 0$ , isto é vorticidade anticiclônica. Esta perturbação no campo de vorticidade induz uma perturbação no campo de movimento o qual advecta as parcelas meridionalmente: a oeste da região de  $\zeta_{t1} < 0$  as parcelas são deslocadas para norte e a leste desta região as parcelas são deslocadas para sul. Os deslocamentos para norte e sul das parcelas mudam a vorticidade relativa que por sua vez advecta as parcelas meridionalmente. Assim, as parcelas do ar oscilam para norte e para sul enquanto a perturbação desloca para oeste. Esta onda que propaga para oeste na ausência de escoamento básico consiste a onda de Rossby.

### 7.8.1. Onda de Rossby barotrópica livre

Uma onda livre é uma onda não forçada. Considera-se a equação de vorticidade barotrópica no plano- $\beta$  em latitudes médias

$$[\partial/\partial t + u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y)]\zeta + \beta v = 0. \quad (7.46)$$

Assume-se que  $u(x, t) = \bar{u} + u'(x, t)$ ;  $\zeta(x, t) = \bar{\zeta} + \zeta'(x, t)$ ;  $v = v'$ .

Define-se uma função de corrente  $\psi'$  tal que

$$u' = -\partial\psi'/\partial y; v' = \partial\psi'/\partial x. \quad (7.47)$$

Para  $u'$ ,  $v'$  geostróficos,  $u' = -(1/f_0)\partial\Phi'/\partial y$ ,  $v' = (1/f_0)\partial\Phi'/\partial x$ . Portanto, obtém-se a relação  $\psi' = \Phi'/f_0$ . Com isso tem-se

$$\zeta' = \nabla^2\psi'. \quad (7.48)$$

Colocando estas considerações na equação de vorticidade (7.45) tem-se

$$[\partial/\partial t + \bar{u}(\partial/\partial x)] \nabla^2\psi' + \beta(\partial\psi'/\partial x) = 0. \quad (7.49)$$

Procura-se soluções do tipo:

$$\psi' = \text{Re}\{A \exp(i\phi)\}, \text{ onde a fase } \phi = (kx + ly - vt). \quad (7.50)$$

Para obter a relação de dispersão da onda de Rossby Equação (7.50) é substituída na Equação (7.48). Assim

$$(-v + \bar{u}k)(-k^2 - l^2) + k\beta = 0 \rightarrow v = \bar{u}k - \beta k/\mathbf{K}^2 \text{ onde } \mathbf{K}^2 = k^2 + l^2 \rightarrow$$

$$c_x = v/k = \bar{u} - \beta/\mathbf{K}^2. \quad (7.51)$$

A velocidade de propagação da onda de Rossby relativa ao escoamento básico é sempre para oeste. Nota-se que  $|c_x|$  aumenta rapidamente com comprimento de onda e as ondas são dispersivas.

Para comprimento de onda  $L_x, L_y = 6000 \text{ km}$  ( $6 \times 10^6 \text{ m}$ ), isto é,  $k = l = 2\pi/6000 \text{ km}$ , em  $\varphi = 45\text{S}$  a velocidade de propagação é da ordem de  $-8 \text{ ms}^{-1}$ . Em geral o vento básico na média troposfera nas latitudes médias é de oeste para leste, da ordem de  $20 \text{ ms}^{-1}$ . Portanto as ondas de Rossby, em latitudes médias, propagam para leste com uma velocidade de aproximadamente  $10 \text{ ms}^{-1}$ . Onda de Rossby se torna estacionária para

$$\mathbf{K}^2 = \beta / \bar{u} \equiv \mathbf{K}_s^2. \quad (7.52)$$

A velocidade de grupo da onda de Rossby é

$$c_{gx} = \partial v / \partial k = \bar{u} + \beta / \mathbf{K}^2; c_{gy} = \partial v / \partial l = 2\beta k l / \mathbf{K}^2 \quad (7.53)$$

Isto é, o grupo ou energia da onda de Rossby desloca-se sempre para leste. Combinando os dois componentes da velocidade de grupo em um vetor,  $\mathbf{c}_g = \mathbf{i}c_{gx} + \mathbf{j}c_{gy}$  pode-se escrever

$$(\mathbf{c}_g - \bar{u} \mathbf{i}) = (\beta/K^2) \{ \mathbf{i} + (2kl/K^2)\mathbf{j} \}. \quad (7.54)$$

### 7.9. Ondas de gravidade internas

A existência dessas ondas se deve a flutuabilidade do fluido. Ondas de gravidade na atmosfera existem somente em situações de estabilidade estática, isto é, em situações de estratificação estável. Nestas condições, parcelas de ar deslocadas verticalmente terão oscilações de flutuabilidade. A força restauradora nesse caso é a força de flutuabilidade, a qual se deve a gravidade. Na atmosfera sem fronteira no topo ondas de gravidade podem propagar em três dimensões. Nas ondas que propagam na vertical a fase de onda é uma função de altura, e elas são chamadas ondas internas. Estas ondas não são importantes para movimentos de escala sinótica. Porém, os movimentos de escala subsinótica são afetadas por estas ondas. Elas geram turbulência. Quando turbulência ocorre em condições de céu claro, isto é, em condições meteorológicas de “bom tempo”, aquela é chamada CAT (“Clear Air Turbulence”).

Para estudar estas ondas vamos desprezar, novamente, a força de Coriolis e considerar ondas progressivas no plano  $x$ - $z$ . Estas ondas são transversais de tal maneira que as oscilações de parcelas são paralelas às linhas de fase. Vamos simplificar o problema matemático considerando a atmosfera como um fluido Boussinesq. Isto é, a densidade é tratada como constante em todas as equações exceto no termo de flutuabilidade. A atmosfera é considerada incompressível e as variações locais de densidade são desprezadas. Lembra-se de que, de fato, a aproximação de Boussinesq é válida somente para movimentos em que a escala vertical é muito menor que a altura da escala.

As equações básicas governantes são:

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + w \partial u / \partial z + (1/\rho)(\partial p / \partial x) = 0 \quad (7.55)$$

$$\partial w / \partial t + u \partial w / \partial x + w \partial w / \partial z + (1/\rho)(\partial p / \partial z) + g = 0 \quad (7.56)$$

$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = 0 \quad (7.57)$$

$$\partial \theta / \partial t + u \partial \theta / \partial x + w \partial \theta / \partial z = 0 \quad (7.58)$$

onde  $\theta = (p/\rho R)(p_s/p)^{R/C_p}$ .

Emprega-se o método de pequenas perturbações para linearizar as equações. Assume-se que

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= \bar{u}(z) + u'(x,z,t) ; p(x,z,t) = \bar{p}(z) + p'(x,z,t) ; \rho = \rho_0(z) + \rho'(x,z,t), \\ w &= w'(x,z,t) ; \theta = \bar{\theta}(z) + \theta'(x,z,t) \end{aligned} \quad (7.59)$$

onde

$$d \bar{p} / dz = -\rho_0 g, \ln \bar{\theta}(z) = \gamma^{-1} \ln \bar{p}(z) - \ln \rho_0(z) + \text{constante}.$$

Tem-se



$$\theta' / \bar{\theta} \approx \gamma^{-1} (p' / \bar{p}) - \rho' / \rho_0 \rightarrow \rho' \approx \rho_0 (\theta' / \bar{\theta}) + p' / c_s^2. \quad (7.60)$$

onde  $c_s$  é a velocidade de som.

Para ondas de gravidade as flutuações em  $\rho'$  devido as variações em  $p'$  são consideradas pequenas comparadas com as devido as variações da temperatura. Assim,

$$\rho' / \rho_0 \approx \theta' / \bar{\theta} \quad (7.61)$$

Substituindo as Equações (7.59) nas Equações (7.55-7.58), levando em conta (7.61) e linearizando o conjunto, tem-se

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x) u' + (1/\rho_0)(\partial p'/\partial x) = 0 \quad (7.62)$$

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x) w' + (1/\rho_0)(\partial p'/\partial z) - g(\theta' / \bar{\theta}) = 0 \quad (7.63)$$

$$\partial u' / \partial x + \partial w' / \partial z = 0 \quad (7.64)$$

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x) \theta' + w' \partial \bar{\theta} / \partial z = 0 \quad (7.65)$$

Agora, eliminaremos  $u'$ ,  $p'$ ,  $\theta'$  do conjunto de Equações (7.62-7.65) para obter

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)^2 (\partial^2 w' / \partial x^2 + \partial^2 w' / \partial z^2) + N^2 (\partial^2 w' / \partial x^2) = 0 \quad (7.66)$$

onde

$$N^2 \equiv g(d \ln \bar{\theta} / dz) \quad (7.67)$$

na qual  $N$  é a frequência de Brunt-Vaisala e é assumida constante.

A Equação (7.65) possui soluções senoidais da forma

$$w' = \text{Re} \{ \mathbf{w} \exp(i\phi) \} = w_r \cos \phi + w_i \sin \phi, \text{ onde a fase } \phi = (kx + mz - vt), \quad (7.68)$$

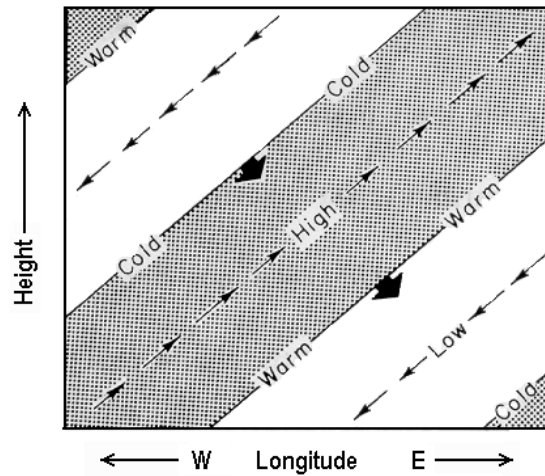
onde  $\mathbf{w} = w_r + iw_i$  é uma amplitude complexa. Aqui, o número de onda  $k$  é real, todavia, o número de onda  $m$  pode ser complexa, portanto  $m = m_r + im_i$ . Neste caso  $m_r$  descreve a forma ondulatória na vertical e  $m_i$  representa um decaimento da amplitude com altura. Quando  $m$  é real o número de onda  $\mathbf{K} = \mathbf{i}k + \mathbf{k}m$  pode ser considerado um vetor direcionado perpendicularmente às linhas de fase  $\phi = \text{constante}$ . Relembramos que  $k = 2\pi/L_x$ ,  $m = 2\pi/L_z$ .

A equação de dispersão obtida pela substituição da Equação (7.68) na Equação (7.66) é

$$(\bar{v} - \bar{u}k)^2 (k^2 + m^2) - N^2 k^2 = 0 \rightarrow \quad (7.69)$$

$$\bar{v} \equiv (\bar{v} - \bar{u}k) = \pm Nk / (k^2 + m^2) = Nk / |\mathbf{K}| \quad (7.70)$$

onde  $\bar{v}$  é chamada frequência intrínseca ou frequência relativo a escoamento básico  $\bar{u}$ . Para  $k > 0$  e  $m < 0$  as linhas de fase (ou linhas de  $\phi = \text{constante}$ ) inclinam-se para leste com altura conforme a Figura 7.8 do livro de Holton. Isto ocorre porque  $\phi = kx - |m|z = \text{constante}$ , o que implica aumento de  $z$  com  $x$  das linhas de fase.



**Figura 7.8:** Estrutura da onda de gravidade interna. Warm: quente, Cold: frio, High: alta pressão (ou crista), Low: baixa pressão (cavado). Vento é representado pelas setas.

Escolhendo o raiz de  $\bar{v}$  com sinal positivo na Equação (7.70) a onda deve propagar-se para leste e para baixo relativo a escoamento básico com velocidades de fase,

$$c_x = \bar{v}/k \text{ e } c_z = \bar{v}/m. \tag{7.71}$$

Os componentes da velocidade de grupo são dados por

$$c_{gx} = \partial \bar{v} / \partial k = \bar{u} \pm Nm^2 / (k^2 + m^2)^{3/2} \text{ e } c_{gz} = \pm [- Nkm / (k^2 + m^2)^{3/2}]. \tag{7.72}$$

Podemos escrever a velocidade de grupo relativo a escoamento básico na forma vetorial da seguinte maneira:

$$\mathbf{c}_g \equiv \mathbf{i}(c_{gx} - \bar{u}) + \mathbf{k}c_{gz} = \pm [\mathbf{i}Nm^2 / (\mathbf{K})^3 - \mathbf{k}Nkm / (\mathbf{K})^3]. \tag{7.73}$$

Esse vetor é perpendicular ao vetor de onda  $\mathbf{K}$ . Ou, o vetor velocidade de grupo está paralelo às linhas de fase de onda. Isto é, estas ondas transportam energia para leste e para cima enquanto deslocam com a velocidade de fase para leste e para baixo. É interessante notar que a inclinação (no plano  $x$ - $z$ ) das linhas de fase depende somente da razão entre frequência de onda e a frequência de fluabilidade (ou frequência Brunt- Vaisala) e é independente de comprimento de onda.

# Capítulo 8

## 8.1. Frentes

Na troposfera, observam-se gradientes de temperatura fortes e ventos fortes concentrados em zonas estreitas. Associada a estas regiões apresenta-se muita atividade meteorológica, principalmente nebulosidade e precipitação. A ocorrência e progressão destas zonas são importantes para a variabilidade do tempo na escala de dias nos subtropicais e nas latitudes médias e altas.

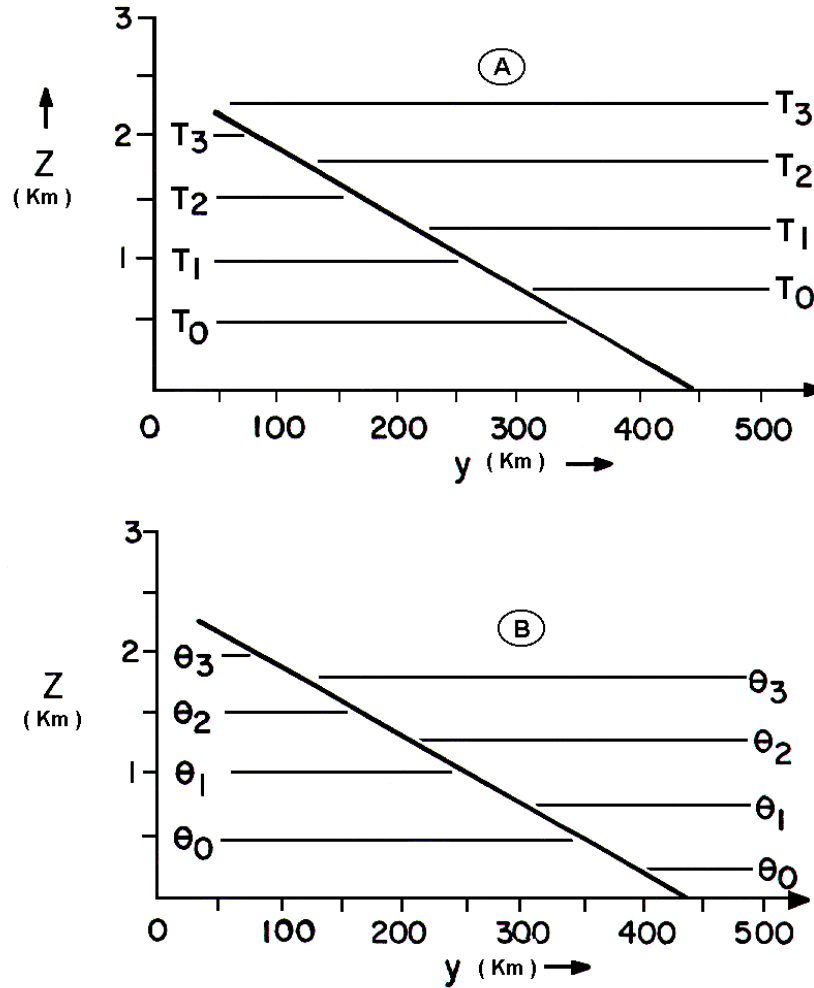
Frentes possuem comprimento da ordem de milhares de km ( $\sim 1000$  km), mas a escala transversal é da ordem de apenas centenas de km ( $\sim 100$  km). Ventos podem exceder  $50$   $m s^{-1}$ . O número de Rossby  $Ro$  é pequeno para escoamento ao longo da frente, o que significa que o balanço geostrófico é mantido na direção transversal. Isto é, a força de gradiente de pressão e a força de Coriolis na direção transversal estão em um balanço aproximado. Mas, na direção paralelo a frente não se encontra o balanço.

Assim sendo, frente é uma zona de forte gradiente de temperatura e relativa alta estabilidade estática. Ela é uma fronteira entre duas massas de ar, massa do ar quente e massa do ar frio. De fato frente é uma fronteira entre duas massas de densidades diferentes. Valores aproximados encontrados são: gradiente de temperatura  $> 10$  K/1000 km, gradiente de umidade  $> 10$  gm  $kg^{-1}$  / 1000 km, vento  $> 30$   $m s^{-1}$ , e cisalhamento  $> 5$   $m s^{-1}$  / km.

Por razão da alta estabilidade estática, a região frontal apresenta alta frequência de Brunt-Vaisala e portanto turbulência forte nos vôos dos aeronaves que atravessam zonas frontais.

## 8.2. Frente como uma descontinuidade da zero ordem

Vamos supor que a frente é uma descontinuidade no campo de densidade, isto é,  $\rho_w < \rho_c$ , onde  $\rho_w$  e  $\rho_c$  são, respectivamente, densidade da massa do ar quente e da massa do ar frio. Os subscritos w e c são usados para designar as variáveis nas massas de ar quente e de ar frio, respectivamente. Para que a situação seja estável, a massa do ar quente (massa mais leve) deve ficar em cima da massa do ar frio (massa mais pesada). Veja Figura 8.1.



**Figura 8.1:** Descontinuidade da primeira ordem nos campos de A: temperatura, B: temperatura potencial.

Agora considera-se uma situação bidimensional no plano  $y-z$ , e uma situação uniforme na direção  $x$ . O diferencial de pressão pode ser escrito

$$dp = (\partial p / \partial y) dy + (\partial p / \partial z) dz = (\partial p / \partial y) dy - g\rho dz.$$

Na massa do ar quente próximo a frente tem-se-á

$$(dp)_w = (\partial p / \partial y)_w dy - g\rho_w dz. \tag{8.1}$$

Da mesma forma na massa do ar frio tem-se-á

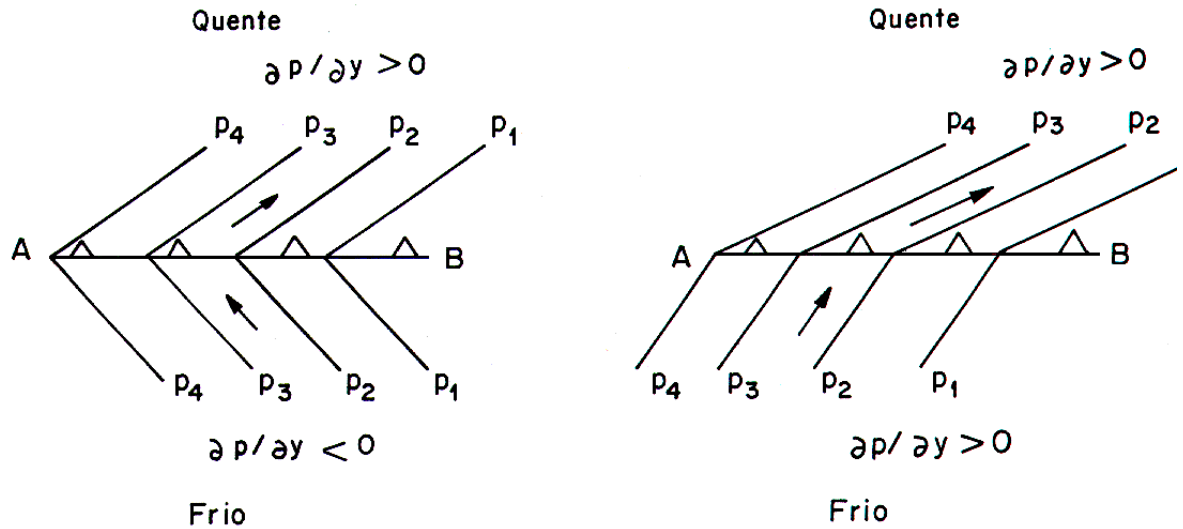
$$(dp)_c = (\partial p / \partial y)_c dy - g\rho_c dz. \tag{8.2}$$

$$\text{Mas, a continuidade requer que } (dp)_w = (dp)_c. \tag{8.3}$$

Então, tem-se-á a inclinação da superfície frontal

$$(dz/dy)_f = [(\partial p/\partial y)_c - (\partial p/\partial y)_w] / g(\rho_c - \rho_w). \tag{8.4}$$

Uma vez que  $(dz/dy)_f \neq 0$ , existe uma descontinuidade na força do gradiente de pressão nos dois lados da frente. No HS  $(dz/dy)_f < 0$ , em geral, e portanto  $(\partial p/\partial y)_c < (\partial p/\partial y)_w$ . Se o gradiente de pressão varia de um lado para outro da frente as isobaras sofrem um “kink” na frente. Veja Figura 8.2.



**Figura 8.2:** Descontinuidade no campo de pressão. A: alta pressão, B: baixa pressão.

A equação do vento geostrófico nós dá  $(\partial p/\partial y) = -\rho f u_g$ . Portanto

$$(dz/dy)_f = f(\rho_w u_{gw} - \rho_c u_{gc}) / g(\rho_c - \rho_w). \tag{8.5}$$

Esta equação pode ser aproximada

$$(dz/dy)_f \approx f \bar{\rho}(u_{gw} - u_{gc}) / g(\rho_c - \rho_w), \tag{8.6}$$

onde  $\bar{\rho} = (\rho_c + \rho_w)/2$  é uma densidade média. Uma vez que a frente deve se inclinar para o lado do ar frio ( $u_{gw} < u_{gc}$ ) no HS Isto significa que existe necessariamente um cisalhamento ciclônico do vento geostrófico através da frente, o que significa, por sua vez, que uma frente é um cavado.

A inclinação da frente pode ser escrita em termos de temperatura (no lugar de densidade). Assim

$$(dz/dy)_f \approx f \bar{T}(u_{gw} - u_{gc}) / g(T_w - T_c). \tag{8.7}$$

As limitações e consequências deste modelo são:

- (1) a vorticidade ciclônica na frente é infinita
- (2) o modelo não consegue satisfazer as duas condições,

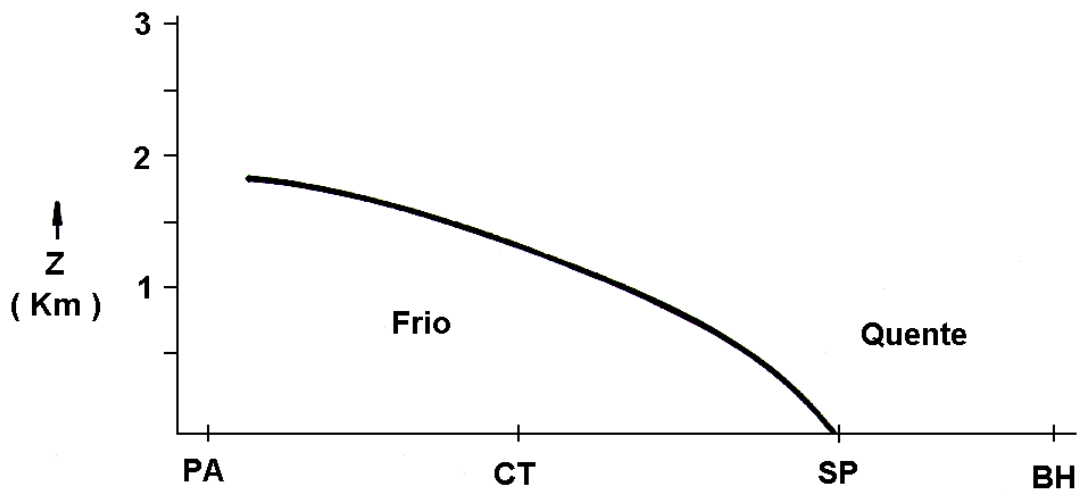
$(\rho_c \neq \rho_w)$  e  $(v_{gc} \rho_c \neq v_{gw} \rho_w)$ , simultaneamente.

Em uma frente geostrófica  $v_{gc} = v_{gw}$ , Isto é nos dois lados da frente o vento transversal deve ser igual e esta é a velocidade com que a frente propaga.

Pode-se obter uma estimativa da inclinação da frente com valores típicos observados do escoamento da seguinte maneira:

$$(dz/dy)_f \approx [(10^{-4} s^{-1})(300 K) (10 m s^{-1})] / [(10 m s^{-2}) (10 K)] \sim 1/300.$$

Este resultado significa que uma superfície frontal é quase horizontal. Se a frente na superfície encontra-se em São Paulo, ela se encontra em Curitiba a uma altura de 1 km. De fato, frente fria forma uma cunha próximo a superfície com uma inclinação mais acentuada rente a superfície e torna-se mais horizontal com altura. Veja Figura 8.3.



**Figura 8.3:** Inclinação da superfície frontal na vertical. PA: Porto Alegre, CT: Curitiba, SP: São Paulo, BH: Belo Horizonte.

### 8.3. Frontogênese

Frontogênese é a formação de uma frente (ou intensificação de uma frente preexistente). Decaimento de uma frente é chamada frontólise. Matematicamente define-se frontogênese da seguinte forma:

$$F = (D/Dt)|\nabla \theta| \tag{8.8}$$

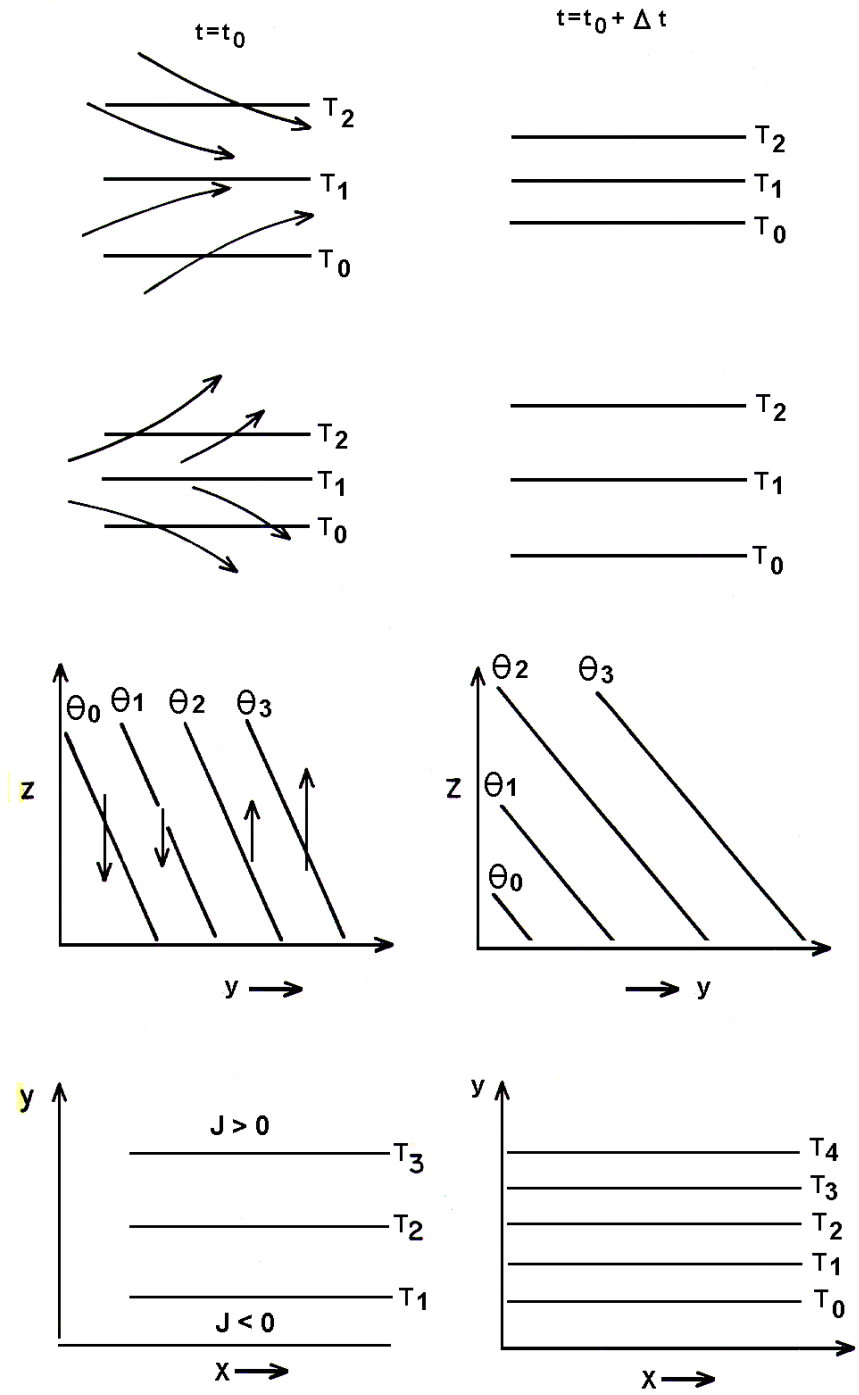
F é a taxa de variação do gradiente de temperatura potencial seguindo parcelas do ar.

Considere uma zona frontal alinhada zonalmente, isto é paralelo aos círculos de latitude. Neste caso, em coordenadas isobáricas no Hemisfério Sul, uma vez que  $(\partial\theta/\partial y) > 0$ , F pode ser escrita (vide Bluestein, 1993)

$$F = (D/Dt)(\partial\theta/\partial y)_p \\ = (\partial v/\partial y)_p(\partial\theta/\partial y)_p + (\partial\omega/\partial y)_p(\partial\theta/\partial p) - (1/C_p)(p_0/p)^{R/C_p}(\partial/\partial y)(dQ/dt), \quad (8.9)$$

onde  $D\theta/Dt = (1/C_p)(p_0/p)^{R/C_p}(dQ/dt)$  na qual  $\theta$  é a temperatura potencial e  $dQ/dt$  é a taxa de aquecimento diabático.

O primeiro termo ao lado direito é efeito cinemático de confluência sobre o gradiente horizontal da temperatura. Certamente, um campo de vento confluyente terá o efeito de reduzir as distâncias entre isotérmicas, assim aumentando o gradiente térmico. O termo pode ser interpretado de uma outra maneira: Advecção térmica positiva (ou advecção quente) no lado da massa de ar quente e advecção térmica negativa (advecção fria) no lado da massa de ar frio aumentará o gradiente térmico. O segundo termo é o efeito da variação meridional do movimento vertical sobre o gradiente vertical de temperatura. As isentrópicas inclinam-se para ter um componente no plano horizontal sob a ação do movimento vertical diferencial. O terceiro termo é a variação horizontal do aquecimento diabático (radiação ou liberação do calor latente). Se a massa do ar quente é aquecida e a massa do ar frio é esfriada o gradiente térmico aumenta. Os processos representados pelos três termos são apresentados esquematicamente na Figura 8.4.



**Figura 8.4:** Processos cinemáticos que compactam ou afastam as isotermas. Coluna esquerda mostra isotermas antes do compactamento. Coluna direita mostra depois.

**8.4. Função frontogenética do Petterssen**

Um escoamento horizontal na vizinhança imediata de um dado ponto pode ser decomposto em quatro partes: translação, divergência, rotação e deformação (ver Equação

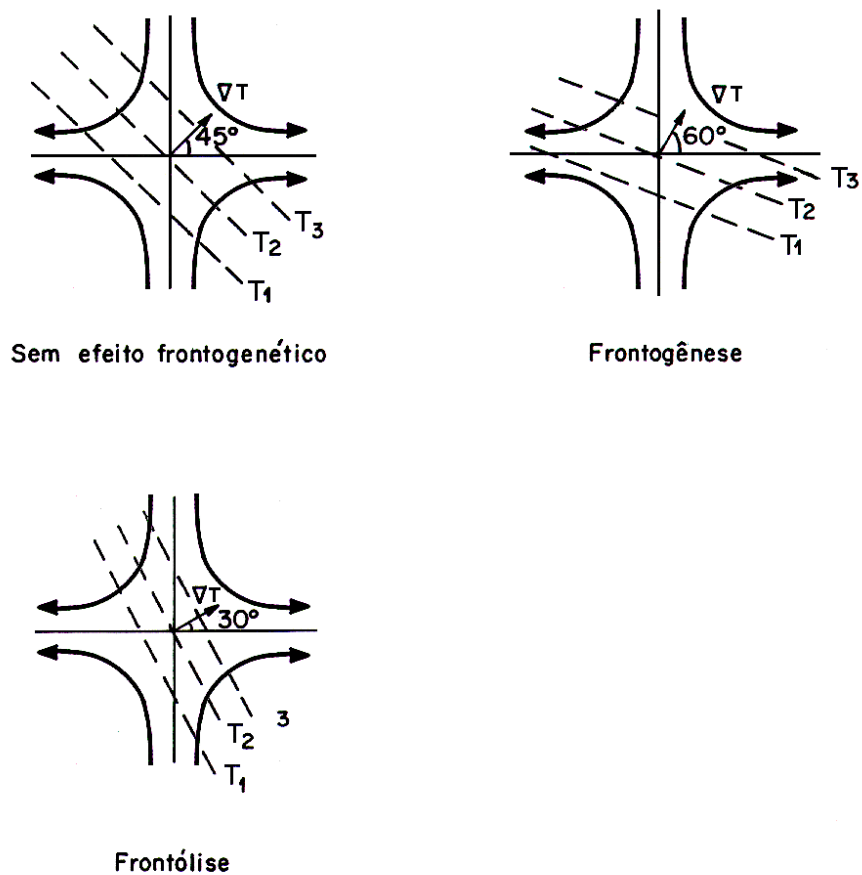


3.1.3 do Bluestein, 1992). Devido ao efeito cinemático dos campos de deformação e divergência o gradiente térmico no ponto pode aumentar, criando uma zona frontal, ou diminuir, desintensificando uma frente. Este efeito é expresso pela função frontogenética do Petterssen:

$$F = (1/2)|\nabla\theta|(D \cos 2\beta - \delta) \quad (8.10)$$

onde  $D = (\partial u/\partial x' - \partial v/\partial y')$  é a deformação resultante após a rotação de coordenadas de tal maneira que  $(\partial v/\partial x' + \partial u/\partial y') = 0$ . Após esta rotação de coordenadas o eixo  $x'$  coincide com o eixo de dilatação (do campo de deformação). (Para maiores detalhes ver o Capítulo 3 do Bluestein, 1992.)  $\beta$  é ângulo entre o eixo de dilatação  $D$  e o gradiente de temperatura.  $\delta = (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$  é a divergência (e é invariante com respeito a rotação dos eixos).

A partir desta equação pode-se notar que (i) o efeito da deformação é frontogénico quando o eixo de deformação está entre  $-45^\circ$  e  $+45^\circ$  do gradiente de temperatura. Quando o ângulo  $\beta$  é maior que  $45^\circ$  e menor que  $90^\circ$  o efeito é frontolítico, (ii) a convergência ajuda frontogênese e a divergência frontólise, e (iii) vorticidade não afeta frontogênese, pois o efeito cinemático da rotação é apenas girar a orientação das isotermas. O efeito do atrito é difundir os extremos de gradiente, e portanto é frontolítico. Os efeitos da deformação são ilustrados na Figura 8.5 (adaptada da Figura 2.13 do Bluestein, 1993).



**Figura 8.5:** Ação de campo de deformação sobre campo térmico para produzir frontogênese ou frontólise.

Referências:

Bluestein, H. B., 1992: Synoptic-Dynamic Meteorology in the Midlatitudes: Principles of Kinematics and Dynamics. Oxford University Press, Oxford, 431 pp.

Bluestein, H. B., 1993: Synoptic-Dynamic Meteorology in the Midlatitudes: Observations and Theory of Weather Systems. Oxford University Press, Oxford, 593 pp.

## GLOSSÁRIO

**Advecção** é transporte efetuado (eminentemente no plano horizontal) pelo escoamento. A expressão matemática para a advecção de uma variável escalar  $\alpha$  é dada por  $-\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha$ , onde  $\mathbf{U} = (iu + jv + kw)$  é vetor do movimento do fluido (ver **Coordenadas** para  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ),  $\nabla$  é operador nabla (ver **Gradiente**). As unidades são  $\alpha s^{-1}$ .

**Alta** é a região da relativa alta pressão em comparação com a vizinhança no mesmo nível horizontal, ou região da relativa alta geopotencial no mesmo nível isobárico. A intensidade de alta é medida em termos do Laplaciano horizontal de pressão em uma superfície horizontal ou em termos do Laplaciano de geopotencial em uma superfície isobárica. Na região de alta o Laplaciano é negativo.

**Anticiclone** é uma região de circulação no sentido horário no plano horizontal no Hemisfério Norte e sentido antihorário no Hemisfério Sul. A sua intensidade é medida em termos da vorticidade.

**Aproximação Boussinesq** é uma simplificação das equações que governam escoamento atmosférico ou oceânico baseada na suposição de que a variação da densidade não é importante para a dinâmica exceto quando a densidade está associada com a gravidade. Isto é, a densidade é considerada constante em todos os termos das equações governantes exceto no termo de flutuabilidade (“buoyancy”) das parcelas do fluido.

**Aproximação do Plano** -  $\beta$  é uma simplificação linear da variação meridional do parâmetro de Coriolis ( $f$ ), tal que  $f \approx f_0 + \beta y$ , onde  $f_0$  é o parâmetro de Coriolis em uma latitude,  $\varphi_0$  em  $y = 0$ ,  $\beta \equiv \frac{\partial f}{\partial y} = 2\Omega \cos \varphi / a$  é a distância meridional. Esta aproximação é válida para  $y$  pequena. Para  $\varphi_0 \approx 45^\circ$  a aproximação é chamada de aproximação do plano  $\beta$  de latitudes médias, e nesta  $\beta y \ll f_0$ . Quando  $\varphi_0 \approx 0^\circ$  a aproximação é chamada aproximação do plano  $\beta$  equatorial. Nesta  $f_0$  é nulo ou  $\ll \beta y$ .

**Atrito** é a força que opõe movimento relativo entre duas lâminas adjacentes do fluido ou entre o fluido e as paredes rígidos que contém o fluido. Quando o movimento relativo é nulo a força do atrito também é nula.

**Aproximação tradicional** é a consideração que a profundidade da atmosfera terrestre é muito menor que o raio da Terra ( $a$ ). Isto é a altura de uma parcela atmosférica acima da superfície terrestre,  $z$ , é muito menor que o raio da Terra ou,  $z \ll a$ , portanto a distância da parcela do centro da Terra  $r \approx a$ .

**Baixa** é a região da relativa baixa pressão em comparação com a vizinhança no mesmo nível horizontal ou região de relativa baixa geopotencial no mesmo nível isobárico. A intensidade de baixa é medida em termos do Laplaciano horizontal de pressão em uma superfície

horizontal ou em termos do Laplaciano de geopotencial em uma superfície isobárica. Na região de baixa o Laplaciano é positivo.

**Balanço Ciclostrófico** é um balanço entre as forças de gradiente de pressão e centrífuga. Este balanço é viável quando a força de Coriolis e atrito são ausentes ou desprezíveis. Para os movimentos rotacionais de pequena escala como redemoinhos e tornados o balanço ciclostrófico é uma boa aproximação.

**Balanço Geostrófico** é um balanço entre as forças de gradiente de pressão e de Coriolis. Este balanço é viável somente quando outras forças como centrífuga e atrito são ausentes ou desprezíveis. Para escoamentos atmosféricos em regiões de médias e altas latitudes, longe da camada limite (ou na atmosfera livre) e da desprezível curvatura das isóbaras, este balanço é uma boa aproximação.

**Baroclinia** é um estado do escoamento de fluido em que as isóbaras e isotermas não coincidem, ou seja, a temperatura varia sobre superfícies isobáricas. Sua intensidade e direção são obtidas através do produto vetorial entre o gradiente térmico e o gradiente de pressão. As unidades são  $K m^{-2} hPa$ . Em uma atmosfera baroclínica o escoamento é uma função da altura ou coordenada vertical.

**Barotropia** é um estado do escoamento em que as isobaras e isotermas (portanto as superfícies de igual densidade) são idênticas. Nesta situação o vento geostrófico não varia com altura, isto é vento térmico é nulo, e portanto sistemas geostróficos (ou quasigeostróficos) não sofrem (ou, aproximadamente não sofrem) inclinações com a altura.

**Brisa Marítima** é a brisa ou o vento próximo a superfície no sentido de mar para continente que se desenvolve nas regiões litorâneas nos períodos de tarde. A brisa se deve a variação da pressão na horizontal devido ao aquecimento diurno sobre o continente em relação ao mar adjacente. A brisa normalmente penetra alguns km a até 100 km para dentro do continente. A circulação no plano vertical perpendicular a costa é fechada em uma profundidade de 1 a 2 km.

**Brisa Terrestre** é a brisa ou vento próximo a superfície no sentido de continente para mar que se desenvolve nas regiões litorâneas nos períodos de noite. A brisa se deve a variação da pressão na horizontal devido ao esfriamento noturno sobre a Terra em relação ao mar adjacente. A brisa afeta alguns km a até 100 km para dentro do mar. A circulação no plano vertical perpendicular a costa é fechada em uma profundidade de 1 a 2 km.

**Camada de Ekman** (na atmosfera) é a camada com aproximadamente 2 km de profundidade próximo a superfície, na qual os efeitos do atrito, as forças de Coriolis e gradiente de pressão interagem para produzir um hodógrafo de ventos que giram no sentido antihorário com a altura no Hemisfério Sul. O vento na superfície é nulo e o vento no topo da camada é geostrófico (aproximadamente). O transporte líquido do fluido nesta camada é para regiões de baixa pressão.

**Camada de Superfície** é a camada atmosférica rente a superfície da profundidade geralmente inferior a 100 m em que o transporte turbulento vertical de quantidade de

movimento é constante (ou aproximadamente constante). O perfil vertical de vento nesta camada é logarítmico, sendo o escoamento é nulo na superfície.

**Cavado** é uma região alongada de uma relativa baixa pressão num plano horizontal (ou região alongada de baixos valores de geopotencial numa superfície isobárica). Na região de cavado as isóbaras frequentemente não são fechadas. As isobaras abertas apresentam uma ondulação para o lado das altas pressões. A intensidade do cavado pode ser medida através do Laplaciano do campo de pressão na horizontal ou Laplaciano do campo de geopotencial numa superfície isobárica.

**Ciclone** é uma região em volta do qual a circulação no plano horizontal é antihorária no Hemisfério Norte e horária no Hemisfério Sul. Sua intensidade é medida em termos da vorticidade, a qual é negativa no Hemisfério Sul e positiva no Hemisfério Norte, ou seja do mesmo sinal do **parâmetro de Coriolis**.

**Circulação** é o integral de linha da velocidade tangencial ao longo de um circuito de partículas do escoamento do fluido. As unidades são  $m^2s^{-1}$ . A circulação é uma macro medida da rotação do fluido circundado pelo circuito.

**Clima** de uma localidade constitui o estado médio e o comportamento estatístico da variabilidade dos parâmetros do tempo (temperatura, chuva, vento, etc.) sobre um período suficientemente longo. O período recomendado é de 30 anos.

**Comprimento de Onda** é a distância entre duas cristas consecutivas (ou dois cavados consecutivos) de uma função ou um campo ondulatório. As unidades são m.

**Confluência** é uma característica do escoamento em que as linhas de corrente se unem ou se aproximam. Difluência é a característica oposta, i. é., afastamento ou bifurcação das **linhas de corrente**.

**Constante de Gás** é o constante de proporcionalidade entre o produto da pressão e o volume específico e a temperatura de um gás, designado R.  $R = c_p - c_v$ , onde  $c_p$  e  $c_v$  são calores específicos a pressão constante e a volume constante, respectivamente. As unidades de R são  $J K^{-1}kg^{-1}$ .

**Convergência** é uma característica do escoamento em três dimensões em que um elemento material do fluido tende a diminuir seu volume. Em um escoamento de duas dimensões um elemento material do fluido tende diminuir a sua área sob o efeito da convergência. A convergência de um campo vetorial em três dimensões é dada por  $-\nabla \cdot \mathbf{U} = -\partial u/\partial x - \partial v/\partial y - \partial w/\partial z$ . Veja **escoamento** para  $\mathbf{U}$  e **gradiente** para  $\nabla$ . As unidades são  $s^{-1}$ .

**Coordenadas** usadas na meteorologia são georeferenciadas. Em qualquer ponto da atmosfera (ou oceano) eixo-x, eixo-y e eixo-z apontam nas direções leste, norte e verticalmente para cima, respectivamente. Isto é eixo-z aponta no sentido oposto da gravidade. x, y, z medem as distâncias nas suas respectivas direções. Devido várias vantagens, usa-se um sistema de coordenadas isobáricas na vertical, na qual pressão atmosférica, p, é usada no lugar de z, como coordenada (ou variável independente). Neste

sistema a altura,  $z$  (ou mais precisamente geopotencial  $\phi \approx gz$ ), torna-se uma variável dependente. Uma das grandes vantagens do sistema de coordenadas isobáricas é a simplicidade da equação de continuidade, a qual não contém, explicitamente, a densidade ou volume específico. O termo da força de gradiente de pressão também não contém densidade. Os versores (vetores unitários) nas direções de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  são designados por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , respectivamente.  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  formam um conjunto ortonormal.

**Crista** é uma região alongada de uma relativa alta pressão num plano horizontal (ou região alongada de altos valores de geopotencial numa superfície isobárica). Na região de crista as isóbaras não são fechadas ao contrário a centros de pressão. As isóbaras abertas em torno da crista apresentam uma ondulação para o lado das baixas pressões. A intensidade da crista pode ser medida através do Laplaciano do campo de pressão na horizontal ou Laplaciano do campo de geopotencial numa superfície isobárica.

**Densidade** é a massa por volume unitário do fluido em questão. As unidades são  $\text{kg m}^{-3}$ . Em condições normais, a densidade da água é  $1000 \text{ kg m}^{-3}$ . A densidade da atmosfera no nível do mar, em condições normais, é aproximadamente  $1 \text{ kg m}^{-3}$ . Ela se relaciona com a pressão e temperatura através da **equação do estado**.

**Derivada Total** ou **Derivada Substancial** de uma variável  $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$  do escoamento é dada por  $D\alpha/Dt \equiv \partial\alpha/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla\alpha$ , onde o vetor de movimento tridimensional  $\mathbf{U} = (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k})$  e  $\nabla \equiv (\mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z)$ , na qual  $\partial\alpha/\partial t$  é a derivada local e  $\mathbf{U} \cdot \nabla\alpha$  é a derivada advectiva. A derivada total é a taxa de variação com tempo de  $\alpha$  de uma parcela do fluido seguindo o seu movimento. (Veja coordenadas para  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .)

**Derivada Local** ou **Tendência** de uma variável  $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$  do escoamento é dada por  $\partial\alpha/\partial t$  em um ponto fixo no fluido. A derivada local é a taxa de variação da variável com tempo em um dado ponto ou local.

**Deformação** é a característica do movimento do fluido que deforma um elemento de teste do fluido, sem aumentar ou diminuir o seu volume ou sem rotacioná-lo. Isto é, sob a atuação de um escoamento deformativo o elemento sofre uma dilatação ao longo de uma direção e contração ao longo de outra, sem alterar o seu volume. A direção ao longo da qual a parcela sofre máxima dilatação é o eixo de dilatação e a direção ao longo da qual o elemento sofre a máxima contração é o eixo de contração. Estes eixos não necessariamente são perpendiculares. Uma medida de deformação de um escoamento em duas dimensões ( $x$ ,  $y$ ) pode ser obtida através do cálculo das seguintes quantidades,  $D_1 = \partial u/\partial x - \partial v/\partial y$  e  $D_2 = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ . Com a rotação de coordenadas de referência ( $x$  e  $y$  para  $x'$  e  $y'$ ) podemos zerar um dos componentes da deformação. Nas regiões do escoamento difluente ou confluyente a deformação é grande. As unidades são  $\text{s}^{-1}$ . Frentes térmicas e bandas de nebulosidade na atmosfera são orientadas ao longo do eixo de contração (ou eixo de confluência).

**Difluência** é uma característica do escoamento em que as linhas de corrente se afastam ou se bifurcam, corrente abaixo. **Confluência** é a característica oposta, i. é., as linhas de corrente se unem ou aproximam.

**Divergência** é uma característica do escoamento em três dimensões em que um elemento material do fluido tende a se expandir ou aumentar seu volume. Em um escoamento de duas dimensões um elemento material do fluido tende a aumentar sua área. A divergência de um campo vetorial,  $\mathbf{U}$ , é dada por  $\nabla \cdot \mathbf{U} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ , e é oposto da **convergência**. As unidades deste campo são  $s^{-1}$ .

**Entropia** ( $s$ ) é uma medida de desordem num sistema termodinâmico. Em processos reversíveis a sua taxa de variação seguindo o escoamento num fluido é dada por  $Ds/Dt = J/T$  onde  $J$  é a taxa de aquecimento e  $T$  é a temperatura. Processos em que  $J = 0$  a entropia permanece constante. Os processos em que  $s$  é constante são processos isentrópicos ou adiabáticos. Nestes processos a temperatura potencial ( $\theta$ ) das parcelas atmosféricas também permanece constante ou conservada.

**Equação de Continuidade** é a equação que expressa a conservação de massa e é dada por:  $(1/\rho)D\rho/Dt + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ . O primeiro termo é a variação relativa da densidade do fluido seguindo o escoamento e o segundo é a divergência do escoamento.

**Equação do Estado** é a equação que relaciona as variáveis do estado do fluido. No caso da atmosfera ela é expressa por:  $p\alpha = RT$ , ou  $p/\rho = RT$ , onde  $p$  é pressão,  $\alpha$  é volume específico,  $\rho$  é densidade,  $T$  é temperatura e  $R$  é constante do gás da atmosfera. Conhecimento de quaisquer duas variáveis entre  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$  e  $T$  é suficiente para determinar o estado completo da atmosfera.

**Equação de Movimento** é a equação que expressa a segunda lei de Newton ou equivalentemente o princípio de conservação da quantidade de movimento (ou momentum): a aceleração de uma partícula (ou uma parcela do ar) é igual ao somatório de forças por massa unitária atuantes sobre a parcela (forças reais e aparentes). Nas coordenadas georeferenciadas, a equação é escrita da seguinte forma:  $D\mathbf{U}/Dt = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - (1/\rho)\nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r$ , onde  $\mathbf{U}$  é o vetor de movimento em três dimensões,  $\nabla$  é o operador nabla,  $\mathbf{g}$  é a gravidade da Terra (na qual foi incorporada a força centrífuga devido a rotação da Terra),  $\boldsymbol{\Omega}$  é a velocidade angular da Terra (vetor) e  $\mathbf{F}_r$  é a força de atrito (ou viscosidade). O primeiro termo do lado direito é a força de Coriolis e o segundo é a força de gradiente de pressão.

**Equação Omega** é uma equação diagnóstica obtida pela eliminação da tendência geopotencial entre as equações quasigeostróficas de vorticidade e termodinâmica (expressas em termos de geopotencial). Ela é dada por:

$$[\nabla^2 + (f_0^2/\sigma)(\partial^2/\partial p^2)]\omega = (f_0^2/\sigma)(\partial/\partial p)\{\mathbf{V}_{g_0} \cdot \nabla[(\nabla^2 \Phi/f_0) + f]\} + (1/\sigma)\nabla^2\{\mathbf{V}_{g_0} \cdot \nabla[-\partial \Phi/\partial p]\}$$

onde  $\omega$  é a velocidade vertical,  $f$  é parâmetro de Coriolis ou a vorticidade planetária,  $f_0$  é o seu valor numa latitude referencial,  $\sigma$  é estabilidade estática,  $\Phi$  é geopotencial. O termo do lado esquerdo é Laplaciano (tridimensional) da  $\omega$ , o primeiro termo do lado direito é a variação vertical da advecção da vorticidade absoluta e o segundo é o Laplaciano da advecção térmica. Esta equação expressa em termos do vetor  $\mathbf{Q}$ , para  $\beta = 0$ , é dada por:

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_0^2 (\partial^2 \omega / \partial p^2) = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}. \text{ Veja Vetor } \mathbf{Q}.$$

**Equação de Tendência** é uma equação diagnóstica obtida pela eliminação de  $\omega$  nas equações quasigeostróficas de vorticidade e termodinâmica. Ela é dada por



$[\nabla^2 + (\partial/\partial p)\{(f_0^2/\sigma)(\partial/\partial p)\}]\chi = -f_0\{\mathbf{V}_g \cdot \nabla[(\nabla^2\Phi/f_0) + f]\} - (\partial/\partial p)[(-f_0^2/\sigma)\mathbf{V}_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)]$ ,  
 onde  $\chi = \partial\Phi/\partial t$  é a tendência geopotencial. Para o significado de demais símbolos veja **Equação Omega**.

**Equação Termodinâmica** é a expressão da lei da conservação da energia e é dada por:  
 $C_v D T / D t + p D \alpha / D t = J$ , onde  $C_v$  é calor específico a volume constante do fluido (atmosfera),  $T$  é temperatura,  $\alpha$  é o volume específico,  $p$  é pressão e  $J$  é a taxa de aquecimento,  $D/Dt$  é derivada total ou substancial. O primeiro termo do lado esquerdo é a taxa de variação da energia interna do fluido e o segundo é a taxa de trabalho feito para expansão do fluido. A equação pode ser escrita das seguintes formas também:

$C_p D T / D t - \alpha D p / D t = J$ ;  $C_p D(\ln T) / D t - R D(\ln p) / D t = Ds / D t$ ;  $C_p D \ln \theta / D t = Ds / D t$ ; onde  $C_p$  é o calor específico a pressão constante e  $s$  é entropia para processos termodinamicamente reversíveis e  $\theta$  é a **temperatura potencial**.

**Equação de Vorticidade** é uma equação obtida tomando rotacional da equação de movimento. Para os sistemas sinóticos (escala horizontal de  $\sim 1000$  km e escala temporal de alguns dias) o componente vertical da vorticidade relativa,  $\zeta$ , é o mais importante. Portanto, a equação que descreve as tendências da  $\zeta$  é, normalmente, considerada a equação de vorticidade. Ela é dada em coordenadas isobáricas por:  $\partial\zeta/\partial t = -\mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + f) - \omega \partial\zeta/\partial p - (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \{(\partial\mathbf{V}/\partial p) \times \nabla\omega\}$ , onde  $\mathbf{V}$  é **vento** (parte horizontal do vetor de movimento),  $\omega = dp/dt$  é a velocidade vertical. O termo ao lado esquerdo é a tendência da vorticidade relativa, o primeiro termo do lado direito é a advecção da vorticidade absoluta, o segundo termo é a advecção vertical da vorticidade, o terceiro é efeito de divergência e o quarto é efeito de inclinação do eixo de cisalhamento.

**Escoamento** é o conjunto de características do fluxo e do estado do meio (ou fluido). Para definir completamente um escoamento sobre um domínio de interesse, precisa especificar o campo vetorial de movimento (tridimensional ou bidimensional) mais os campos dos variáveis de estado do meio e as propriedades do meio, tais como gasosa ou líquida, taxa de rotação, campo gravitacional, etc.

**Estabilidade** é uma característica do escoamento de um fluido que diz respeito a tendência de decaimento ou amplificação de uma perturbação pequena superposta nele. Quando a perturbação tende a crescer o escoamento ou o estado do fluido é dito instável. Quando a perturbação tende a diminuir o escoamento ou o estado do fluido é dito estável. Na ciência atmosférica encontramos vários tipos de estabilidade (ou instabilidade) dependendo do tipo e a escala de perturbação. (Veja **instabilidade baroclínica**, **instabilidade barotrópica**, **estabilidade estática**.)

**Estabilidade Estática** é uma medida da estratificação de um fluido planetário. Para atmosfera terrestre a expressão  $\sigma = -g \partial\theta/\partial p$  (em coordenadas isobáricas) representa adequadamente as condições de estabilidade para perturbações de parcelas do ar na vertical. Quando  $\sigma$  é positiva a atmosfera é estável. Outras expressões para estabilidade estática são encontradas nos livros e revistas. As unidades da  $\sigma$  são  $m s^{-3} K Pa^{-1}$ .

**Flutuabilidade** é a leveza de uma parcela do fluido (ou objeto) em relação ao meio em que se encontra. Uma parcela se torna leve quando a sua densidade é menor que a densidade do

meio ou fluido. É dada por  $g(P_p - P_m)/P_m$  onde  $P_p$  e  $P_m$  são densidades da parcela e do meio respectivamente e  $g$  é a gravidade.

**Força de Gradiente de Pressão**, designada  $F_p$ , é a força que atua num elemento de fluido devido a variação espacial de pressão. Ela atua no sentido oposto do gradiente de pressão e a sua intensidade é proporcional ao módulo do gradiente.  $F_p = -(\nabla p)/\rho$ , onde  $\rho$  é a densidade,  $p$  é pressão,  $\nabla \equiv (\mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z)$  é o operador de gradiente. As unidades são  $N\ kg^{-1}$ . (Veja **gradiente**.)

**Força de Coriolis**, designada  $F_c$ , é uma força aparente que atua sobre um elemento do fluido em deslocamento sobre um planeta em rotação.  $F_c$  é dada por  $-2\Omega \times U$ , onde  $U$  é a velocidade do movimento da parcela do fluido e  $\Omega$  é o vetor da rotação da Terra. As componentes desta força nas direções  $x$  e  $y$  devido ao movimento horizontal da parcela são  $2\Omega u \sin\phi$  e  $2\Omega v \sin\phi$  respectivamente, onde  $\Omega$  é o módulo de  $\Omega$ . A força de Coriolis atua na direção perpendicular ao movimento para a esquerda do movimento horizontal no Hemisfério Sul. A força de Coriolis é nula sobre o equador, é negativa no Hemisfério Sul e é positiva no Hemisfério Norte, atingindo valores extremos nos pólos. As unidades são  $N\ kg^{-1}$ .

**Frente** é a zona de transição entre uma massa do ar quente e uma massa do ar frio. O gradiente horizontal de temperatura através da zona frontal é forte. Se a massa do ar frio avança na direção da massa do ar quente a frente é designada frente fria. Se a massa do ar quente avança na direção da massa do ar frio a frente é designada frente quente. Frentes inclinam com altura para o lado do ar frio da ordem de 100 km na horizontal para 1 km na vertical. A inclinação é maior para as frentes quentes. Todas as frentes são cavados também. Portanto as isobaras na superfície horizontal ou as isolinhas de geopotencial na superfície isobárica apresentam uma projeção para o lado de altas pressões ao atravessar uma frente.

**Frequência**, designada  $\nu$ , expressa o número de ciclos por tempo unitário. Frequência e período,  $\tau$ , são relacionados da seguinte forma:  $\nu = 2\pi/\tau$ . As unidades da frequência são  $s^{-1}$ .

**Frontogênese** é o processo de formação de frente ou intensificação de uma frente existente. Ela é dada por  $F = d|\nabla T|/dt$ , e  $F > 0$  implica frontogênese e  $F < 0$  implica o oposto chamado de **frontólise**. Isto é, em situações de frontogênese o gradiente térmico aumenta e nas situações de frontólise o gradiente diminui com tempo. As unidades são  $K\ m^{-1}s^{-1}$ .

**Frontólise** (veja **Frontogênese**.)

**Geopotencial**, designado  $\phi$ , é a energia potencial de uma parcela do ar de massa unitária, sendo que o seu valor referencial de zero encontra-se, em geral, no nível médio do mar. Ou,  $\phi(z) = \int g\ dz$ , onde os limites inferior e superior do integral são 0 e  $z$ , respectivamente, é o trabalho requerido para levantar uma massa unitária do nível médio do mar ao nível  $z$ . A altura geopotencial é obtida dividindo o geopotencial pela aceleração de gravidade referencial do planeta. As unidades são  $m^2\ s^{-2}$ .

**Gradiente** é um operador vetorial, representado por  $\nabla \equiv \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$ , onde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  são vetores unitários ortogonais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente (ver **Coordenadas**).

A orientação do gradiente é a direção em que a variável está variando com a maior taxa e o seu módulo é justamente esta taxa. O operador tem unidades de  $m^{-1}$ .

**Instabilidade Baroclínica** é a vulnerabilidade de um escoamento (zonal, em geral) planetário representado pelo corrente de jato a uma perturbação de escala sinótica e/ou subsinótica. A instabilidade se deve ao gradiente horizontal de temperatura (basicamente meridional) ou, equivalentemente, devido ao cisalhamento vertical do escoamento. A instabilidade é maior para cisalhamentos maior e para estabilidade estática menor. Para  $\beta$  (variação meridional do parâmetro do Coriolis) maior a instabilidade é menor. Durante o processo de crescimento da amplitude da perturbação a energia potencial do escoamento básico é convertida em energia potencial da onda e, por sua vez, esta energia potencial da perturbação se transforma em energia cinética da perturbação. O desenvolvimento de sistemas sinóticos de médias latitudes, como ciclones extratropicais, se deve a este mecanismo.

**Instabilidade Barotrópica** é a vulnerabilidade do corrente de jato para perturbação de escala sinótica devido a variação horizontal (perpendicular ao eixo do corrente de jato) da vorticidade na zona do jato. A energia cinética da perturbação aumenta recebendo a energia cinética do escoamento básico.

**Isóbara** é a superfície na qual a pressão atmosférica é constante. Em um plano horizontal as isóbaras são linhas que passam pelos pontos de igual pressão. Isto é, um lado da isobara encontram-se pressões maiores do que do outro lado.

**Isoterma** é a superfície na qual a temperatura é constante. Em um plano horizontal as isotermas são linhas que passam pelos pontos de igual temperatura. Isto é, um lado da isoterma encontram-se temperaturas maiores do que do outro lado.

**Laplaciano** é um operador que mede as saliências dos campos escalares tridimensionais (ou bidimensionais). É dado por  $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  (ver **gradiente** para definição do  $\nabla$ ). Ele é equivalente a segunda derivada que mede as máximas e mínimas. (O Laplaciano em duas dimensões horizontais  $x$  e  $y$  é escrito  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ). Nas regiões próximas as máximas o Laplaciano da varável é negativo e nas regiões de mínimas ele é positivo. As unidades são  $m^{-2}$ .

**Linha de Corrente** é uma linha traçada dentro de escoamento de um fluido de tal forma que o escoamento é tangencial a esta linha em todos os pontos em que ela passa. As linhas de corrente que começam na fronteira necessariamente terminam na fronteira do domínio estudado. As linhas que começam dentro do domínio necessariamente se fecham. As equações que geram as linhas de corrente, em três dimensões, são dadas por  $dx/u = dy/v = dz/w$ , nas quais  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  são componentes do segmento da linha de corrente e  $u$ ,  $v$ ,  $w$  são componentes do vetor do escoamento do fluido.

**Movimento Vertical** é o componente vertical do movimento da parcela do ar, designada por  $w$  e é dada por  $w \equiv dz/dt$ . As suas unidades são  $m s^{-1}$ . A sua magnitude, em geral, é muito menor (duas a três ordens) que os movimentos horizontais,  $u$  e  $v$ . Isto é,  $w$ , normalmente, apresenta valores da ordem de  $1 \text{ cm s}^{-1}$ . Movimento vertical nas coordenadas isobáricas é

medido através da quantidade  $\omega \equiv dp/dt \approx -g\rho w$ . (veja **Velocidade Vertical**.) Neste caso as unidades são  $\text{Pa s}^{-1}$ .

**Número de Onda**, designada por  $\mathbf{K} = ik+jl+km$ , onde  $k, l, m$  são seus componentes nas direções  $x, y, z$ , respectivamente, mede o número de cristas (ou cavados) por distância unitária na direção perpendicular aos planos de fase. Ele está relacionado com o comprimento de onda da seguinte forma:  $k = 2\pi/L_x, l = 2\pi/L_y, m = 2\pi/L_z$ , onde  $L_x, L_y, L_z$  são os comprimentos de onda nas direções  $x, y, z$ , respectivamente. (ver também **Onda Plana**.)

**Onda** é alternância de altas e baixas (ou máximos e mínimos), numa variável de campo, que se propagam com tempo. Isto é, em uma onda que se propaga os máximos e mínimos do campo se encontram em posições diferentes em diferentes instantes de tempo. Em uma onda estacionária os máximos e mínimos se encontram nas mesmas posições em todos os instantes do tempo.

**Onda Baroclínica** é uma onda cujo mecanismo de desenvolvimento ou manutenção é a **instabilidade baroclínica**. Normalmente as ondas baroclínicas possuem escala horizontal da ordem de 1000 km. Uma onda baroclínica de latitudes médias apresenta uma defazagem entre os campos de pressão (ou equivalentemente da geopotencial) e o campo térmico de tal forma que a massa do ar frio fica para esquerda do cavado. Isso significa que os cavados e cristas inclinam-se para oeste com altura. As ondas baroclínicas são normalmente acompanhadas de ventos fortes (ou corrente de jato) nos altos níveis.

**Onda Externa** é uma onda que forma na interface de dois fluidos com características distintas de densidade. A amplitude desta onda é máxima na interface e decai (exponencialmente) para os dois lados da interface. Um exemplo é a onda na superfície do mar. Neste caso os dois fluidos são água e ar.

**Onda de Gravidade Externa** é a onda que se forma e propaga na superfície horizontal de um fluido ou na interface entre dois fluidos. A força restauradora da perturbação é a gravidade. A velocidade de propagação depende da profundidade do fluido e a diferença entre as densidades dos fluidos:  $c = \pm [gH(\rho_1 - \rho_2)/\rho_1]^{1/2}$  onde  $g$  é a aceleração de gravidade,  $H$  é a altura média da superfície,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as densidades do fluido inferior e fluido superior, respectivamente. Nota-se que as ondas de gravidade propagam para todos os lados com a mesma velocidade. Esta é uma onda transversal e não dispersiva.

**Onda Interna** é a onda que se forma num fluido estratificado continuamente cuja amplitude é máxima em alguma região no interior do fluido (ou escoamento).

**Onda Plana** é expressa da seguinte forma:  $\phi(x, y, z, t) = \Phi \exp i(kx+ly+mz - vt)$ , onde  $v$  é a frequência,  $k, l, m$  são números de onda nas direções  $x, y, z$  respectivamente, e  $\Phi$  é a amplitude.  $i = \sqrt{-1}$ . As unidades de  $\phi$  e  $\Phi$  são iguais.  $(kx+ly+mz-vt)$  é chamada fase de onda. As linhas de fase constante são dadas pela equação  $kx+ly+mz-vt = \text{constante}$ . Em um dado momento  $t = t_0$  ela representa um plano, para  $k, l, m$  constantes. Por esta razão a onda é chamada onda plana. (Veja também **onda** e **número de onda**.)

**Onda de Rossby** é o movimento ondulatório no plano horizontal da escala sinótica, na qual as regiões de vorticidade ciclônica e anticiclônica se alternam a medida que a onda propaga. A força restauradora desta onda é a força de Coriolis. A velocidade de fase do protótipo da onda de Rossby é dada por  $c = U - \beta/k^2$ , onde  $U$  é escoamento básico (para leste) considerado constante e uniforme,  $\beta = 2\Omega \cos\varphi/r$  onde  $\Omega$  é a velocidade angular da Terra,  $\varphi$  é a latitude e  $r$  é o raio da Terra,  $\beta$  é a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude e  $k$  é o número de onda na direção  $x$ . Esta é uma onda transversal e dispersiva. (Veja **número de onda**.)

**Onda Sonora ou Acústica** é a alternância das compressões e rarefações adiabáticas do fluido. A força restauradora para estas ondas é o gradiente de pressão. A velocidade de fase de ondas sonoras é dada por  $c = \pm (\gamma RT)^{1/2}$ , onde  $\gamma$  é a razão entre calores específicos a volume constante e a pressão constante,  $R$  é o constante de gas e  $T$  é a temperatura. Esta é uma onda longitudinal e não dispersiva.

**Parâmetro de Coriolis**,  $f$ , é dado por  $2\Omega \sin\varphi$  onde  $\Omega$  é a velocidade angular da Terra (ou planeta)  $\varphi$  é a latitude. Ele é positivo no Hemisfério Norte e negativo no Hemisfério Sul, sendo nulo sobre o equador. As unidades são  $s^{-1}$ .

**Plano  $\beta$**  : Veja aproximação do plano -  $\beta$  .

**Pressão Atmosférica**,  $p$ , é a força por área unitária exercida pelo fluido. As unidades são Pa ou  $N\ m^{-2}$  (ver **unidades**). Ela é relacionada com a **temperatura**, **densidade** e volume específica através da equação do estado.

**Quasigeostrofia** é uma característica do escoamento planetário na qual os movimentos em um dado instante são muito aproximadamente geostróficos, porém a evolução temporal do escoamento se deve aos movimentos ageostróficos que são pequenos. Os movimentos atmosféricos da escala sinótica nas latitudes médias da Terra são essencialmente quasigeostróficos. A teoria simplificada para estudar os sistemas de tempo que utiliza este fato é chamada teoria quasigeostrófica.

**Temperatura**,  $T$ , é uma das variáveis do estado de gas e diz respeito ao grau da agitação molecular. Para um gas ideal  $T$  está relacionada com **pressão**, o volume específico e a **densidade** através da equação do estado. A temperatura é medida em graus Kelvin (K) ou graus Celcius (C) que possuem uma diferença constante de tal forma que  $273,16^\circ K = 0^\circ C$ .

**Temperatura Potencial**,  $\theta$ , é a temperatura que a parcela do ar em questão atingiria se ela fosse deslocada adiabaticamente para um nível de pressão de referência,  $p_0$  (em geral,  $p_0 = 1000\ hPa = 100.000\ Pa$ ).  $\theta = T (p_0/p)^{R/C_p}$  onde  $T$  é a temperatura no nível de pressão  $p$ ,  $R$  é constante do gas,  $C_p$  é o calor específico do ar a pressão constante. Em um escoamento adiabático a temperatura potencial é conservada, i. e., a temperatura potencial das parcelas do ar que não trocam calor com o ambiente é conservada ou permanece constante. As unidades são K ou C.

**Temperatura Virtual**,  $T_v$ , é a temperatura que o ar seco teria para igualar a sua densidade com a densidade da parcela do ar em questão, em condições iguais de pressão. Como o ar úmido é mais leve que o ar seco em condições iguais de pressão,  $T_v \geq T$ .

**Tempo** é o conjunto de condições atmosféricas e fenômenos meteorológicos que afetam a biosfera e a superfície terrestre em um dado momento e em um dado local. A temperatura, chuva, vento, umidade, nevoeiro, nebulosidade, etc. formam o conjunto de parâmetros do tempo.

**Tendência Geopotencial** designada por  $\chi \equiv \partial\phi/\partial t$  é a variação do geopotencial com tempo em um dado local. A equação de tendência geopotencial é uma importante ferramenta para previsores de tempo.

**Teorema de Circulação** é obtida tomando integral de linha da segunda lei do Newton (**equação de movimento**) para uma corrente de partículas fechada. Desprezando forças de atrito, o teorema para movimentos atmosféricos terrestres é escrita da seguinte forma:  $DC/Dt = - \int_c (1/\rho) dp - 2\Omega DA_e/Dt$ , onde  $C$  é a circulação relativa a Terra,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $p$  é pressão,  $\Omega$  é a velocidade angular da Terra e  $A_e$  é a projeção da área do circuito no plano equatorial, e  $\int_c$  é o integral fechado de linha.  $D/Dt$  é **derivada total**. O termo do lado esquerda é a taxa de variação da circulação seguindo o movimento do fluido. O primeiro termo do lado direita é efeito solenoidal e o segundo é o efeito da variação meridional do parâmetro de Coriolis. Deve-se lembrar que a projeção é negativa no Hemisfério Sul e é positiva no Hemisfério Norte. Para um fluido barotrópico o efeito solenoidal é nulo, e a equação, neste caso, que expressa a conservação da circulação absoluta, é conhecido como teorema de circulação do Kelvin.

**Trajetória** é o caminho seguido por um corpo ou parcela do fluido ao se movimentar no espaço. A trajetória é determinada pela integração da equação  $ds/dt = U(x, y, z, t)$ , onde  $ds$  e  $U$  são, respectivamente, o segmento direcionado de trajetória e a velocidade do movimento. Deve se lembrar que a posição da partícula é função de tempo, e portanto  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$ . Em um estado permanente, i. e., quando o campo de movimento não varia com tempo, as trajetórias e as **linhas de corrente** coincidem.

**Unidades** são medidas padrões das variáveis do estado e de movimento dos fluidos, corpos e matéria em geral. As unidades básicas padrões usadas são metro (m), quilograma (kg), segundo (s) e grau Kelvin (K). As unidades derivadas frequentemente usadas na meteorologia são: Newton ( $N = kg\ m\ s^{-2}$ ), Pascal ( $Pa = N\ m^{-2}$ ), Joule ( $J = N\ m$ ), Watt ( $W = J\ s^{-1}$ ), Watt Hora ( $Wh = 3600Ws = 3600\ J$ ), millibar ou hectoPascal ( $mb = hPa = 100\ Pa$ ).

**Velocidade Angular** é a taxa de variação do ângulo com o tempo em um movimento rotacional. As unidades são radianos  $s^{-1}$ . A velocidade angular da Terra é  $2\pi$  radianos (ou 360 graus) em um dia.

**Velocidade de Fase** é a velocidade com que as cristas e cavados de uma onda individual deslocam no espaço. Velocidade de fase na direção  $x$  é dada por  $c_x = v/k$ , onde  $v$  é a frequência da onda (plana) e  $k$  é o número de onda na direção  $x$ . As expressões para as velocidades de fase  $c_y$  e  $c_z$  nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, são análogas. As unidades

são  $\text{ms}^{-1}$ . Nota-se que  $c_x$ ,  $c_y$ , e  $c_z$  não são componentes de um vetor. (Veja **Onda** e **Onda Plana**.)

**Velocidade de Grupo** é a velocidade com que os pacotes de ondas (dispersivas) movimentam no espaço. É dada por  $c_{gx} = \partial v / \partial k$ , onde  $v = v(k)$  é a frequência,  $k$  é o número de onda e  $c_{gx}$  é o componente da velocidade de grupo na direção  $x$ . As expressões para  $c_{gy}$  e  $c_{gz}$  são análogas. As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ . Ao contrário das velocidades de fase, as velocidades de grupo nas três direções formam um vetor.

**Velocidade Vertical** é o componente vertical do movimento de uma parcela do ar e é dada por  $w \equiv dz/dt$  (ver **movimento vertical**). As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ . (A sua intensidade é fraca em comparação com os componentes horizontais de movimento, e portanto é medida em  $\text{cm s}^{-1} = 10^{-2} \text{m s}^{-1}$ ). A velocidade vertical em coordenadas isobáricas, designada  $\omega$ , é dada por  $\omega \equiv dp/dt$ . As unidades usadas são  $\text{hPa s}^{-1}$ . A equicalência é aproximadamente dada por  $\omega \approx -g\rho w$ , onde  $g$  é a aceleração de gravidade e  $\rho$  é a densidade. Nota-se que valores negativos da  $\omega$  representam movimentos verticais para cima (ou ascendentes) e vice versa.

**Vento** é a parte horizontal do movimento das parcelas de ar e é dado por  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ , onde  $u$  e  $v$  são componentes nas direções leste e norte respectivamente,  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são vetores unitários nas direções leste e norte, respectivamente. As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ .

**Vento Ageostrófico** é a diferença entre o vento e o vento geostrófico. Esta parte do vento é divergente e pequeno em magnitude em relação ao **vento geostrófico**. As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ .

**Vento Geostrófico**,  $\mathbf{V}_g$ , é definido como vento uniforme e estacionário tangencial às isóbaras retas e paralelas em uma atmosfera sem atrito.  $\mathbf{V}_g$  é proporcional ao gradiente de pressão. No Hemisfério Sul a força de Coriolis atua para a esquerda do  $\mathbf{V}_g$  e a força do gradiente de pressão atua para a direita. As duas forças estando em perfeito balanço, as parcelas do ar não sofrem aceleração. Longe de superfície e barreiras orográficas e longe dos centros de pressão, onde as isóbaras não apresentam grandes curvaturas, o vento observado na escala sinótica nas latitudes médias é aproximadamente geostrófico. As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ .

**Vento Gradiente**,  $\mathbf{V}_{gr}$ , é o movimento curvilíneo estacionário tangencial às isóbaras paralelas com curvatura das parcelas do ar sem atrito. As três forças que atuam sobre as parcelas do ar, gradiente de pressão, Coriolis e centrípeta, mantêm um perfeito balanço e as parcelas não sofrem aceleração da magnitude do vento gradiente. Em volta de centros de baixa pressão o  $|\mathbf{V}_{gr}| > |\mathbf{V}_g|$ , e em volta dos centros de alta pressão  $|\mathbf{V}_{gr}| < |\mathbf{V}_g|$ . As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ .

**Vento Térmico**,  $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{g2} - \mathbf{V}_{g1}$  onde  $\mathbf{V}_{g1}$  e  $\mathbf{V}_{g2}$  são ventos geostróficos na base e no topo de uma camada atmosférica, é a diferença dos ventos geostróficos em dois níveis na vertical. A variação do **vento geostrófico** com altura,  $\partial \mathbf{V}_g / \partial z$ , se deve ao gradiente térmico na horizontal. A direção do vento térmico é perpendicular ao gradiente térmico horizontal. No Hemisfério Sul a região mais quente fica para a esquerda do  $\mathbf{V}_T$ . As unidades são  $\text{m s}^{-1}$ .

**Vetor Q** é um vetor relacionado com as variações no gradiente horizontal de temperatura devido ao efeito do campo de deformação do vento geostrófico. Variações espaciais neste campo representadas por  $-2\nabla p \cdot \mathbf{Q}$  é a função forçante mais importante na equação  $\omega$  quasigeostrófica. Nas regiões da convergência do vetor **Q** espera-se movimento vertical para cima e nas regiões de divergência o movimento é para baixo. É de se esperar que o **Q** e a função frontogênica de Petterssen são intimamente ligados. As unidades são  $\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{kg}^{-1}$ .

**Volume Específico**,  $\alpha$ , é volume de um gás por massa unitária.  $\alpha = 1/\rho$ , onde  $\rho$  é densidade (ver densidade).  $\alpha$  está relacionado com a temperatura e pressão através da equação do estado. As unidades de  $\alpha$  são  $\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$ . O volume específico do ar no nível do mar é aproximadamente  $1 \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}$ . O volume específico da água em condições normais é de 1 litro por kilograma.

**Vorticidade Relativa**,  $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  onde  $u$  e  $v$  são componentes do vento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, é a medida pontual da rotação de um escoamento no plano  $xy$ . As unidades são  $\text{s}^{-1}$ . A vorticidade relativa do escoamento atmosférico em latitudes médias tem a ordem de magnitude de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , sendo uma ordem de magnitude menor que a vorticidade planetária de Terra,  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

**Vorticidade Absoluta**,  $\eta$ , é o somatório da vorticidade planetária e a vorticidade relativa. Isto é,  $\eta = \zeta + f$ , onde  $\zeta = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$  é a vorticidade do escoamento relativo a Terra e  $f$  é a vorticidade devido a rotação da Terra. As unidades são  $\text{s}^{-1}$ . (Veja **parâmetro do Coriolis** e **vorticidade relativa**).

**Vorticidade Potencial**,  $P = -g(\zeta + f)(\partial\theta/\partial p)$ , onde  $\zeta$  é a vorticidade relativa e  $f$  é a vorticidade planetária,  $\theta$  é temperatura potencial  $p$  é a pressão, é a vorticidade relativa que uma parcela teria se for deslocado adiabaticamente para o equador à condição de estabilidade estática unitária.  $P$  é uma quantidade conservada em escoamentos isentrópicos. As unidades usadas são  $\text{m K s}^{-2} \text{hPa}^{-1}$ . (Veja **vorticidade relativa**, **vorticidade planetária**, **temperatura potencial**, **estabilidade estática**).



## Problemas e soluções

Aviso: Alguns problemas sortidos, maioria obtidos do livro do Holton – 3ª Ed., são resolvidos. O aluno deve procurar as respostas no último caso de não conseguir resolvê-los.

Observações: (1) Letras em negrito representam quantidades vetoriais. (2) colchetes representam a média da camada ou média vertical, i. e.  $[\alpha]$  representa a média de  $\alpha$  na camada em questão. (3) Aceleração de gravidade é, normalmente, tomada  $10 \text{ m s}^{-2}$ . (4) Considere o valor do parâmetro de Coriolis,  $f = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , quando não foi especificado nenhum valor. (5) Em geral as unidades são do sistema mks, todavia usam-se unidades de hora (h), dia (d), hectoPascal (hPa = milibar), etc. quando for preciso.

1. Calcule a espessura entre as superfícies de 1000 e 500 hPa de uma atmosfera isotérmica (temperatura constante com altura) com a temperatura de 280K.

Resposta:

A espessura  $Z_T$  entre dois níveis  $p_1$  e  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ) é dada por

$$Z_T = H \ln(p_1/p_2),$$

onde  $H = R[T]/g$  é a altura de escala, na qual  $[T]$  é a temperatura média da camada e  $R$  e  $g$  são constante de gas e aceleração de gravidade, respectivamente.  $R = 287 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$  e  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

Para a atmosfera isotérmica dada  $[T] = 280\text{K}$ , a altura de escala,  $H = 287 \times 280 / 10 = 8036 \text{ m}$ .

Portanto,  $Z_T = 8036 \times \ln(1000/500) = 8036 \times \ln(2) = 5570 \text{ m} \approx 5,6 \text{ km}$ .

2. Suponha que uma parcela do ar parte de repouso no nível de 800 hPa e sobe até 500 hPa mantendo-se mais quente que o ambiente por 1C. (a) Assumindo-se que a temperatura média da camada é de 260K, compute a energia liberada pelo trabalho da força de flutuação. (b) Assumindo-se que toda a energia liberada é convertida em energia cinética, qual será a velocidade vertical da parcela em 500 hPa?

Resposta:

(a) A força por massa unitária de flutuação (ou aceleração vertical) de uma parcela do fluido é dada por

$$Dw/Dt = g(\rho_0 - \rho)/\rho = g\theta'/\theta_0$$

Onde  $\rho$  e  $\theta$  são a densidade e a temperatura potencial, respectivamente, da parcela.  $\rho_0$  e  $\theta_0$  são densidade e temperatura potencial, respectivamente, do ambiente.  $\theta'$  é o excesso da temperatura potencial da parcela em comparação com o ambiente.

Colocando os valores,  $\theta_0 = 260\text{K}$ ,  $\theta' = 1\text{K}$ , e  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ , tem-se  $Dw/Dt = 1/26 \text{ ms}^{-2}$ .

A espessura entre 800 e 500 hPa (calculada nas linhas do Problema 1) é 3507 m.

A energia realizada pela força = força x distância = 135 J

(b) O tempo,  $\Delta t$ , percorrido para atingir o nível de 500 hPa é dado por  $\Delta t = [2Z_T/(Dw/Dt)]^{1/2} = 427 \text{ s}$ .

Velocidade vertical em 500 hPa,  $w(500) = (Dw/Dt)\Delta t$ , uma vez que a velocidade inicial em 800 hPa é nula. Assim,  $w(500) = 427/26 = 16,4 \text{ ms}^{-1}$ .

3. A temperatura média da camada entre 750 e 500 hPa decresce para leste com uma taxa de 3C/100 km. (a) Se o vento geostrófico em 750 hPa é de noroeste com a magnitude de  $20 \text{ m s}^{-1}$ , qual é o vento geostrófico em 500 hPa? Tome o parâmetro de Coriolis,  $f = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . (b) Qual é a advecção térmica média na camada?

Resposta:

$$(a) \partial T/\partial x = - (3/10^5) \text{ }^\circ\text{K/m}$$

Vento térmico,  $\mathbf{V}_{g500} - \mathbf{V}_{g750} \equiv \mathbf{V}_T = (u_T\mathbf{i} + v_T\mathbf{j})$ , o qual é dado por

$u_T = - (R/f)(\partial[T]/\partial y) \ln(750/500) = 0$ , pois  $[T]$  não varia com  $y$ .

$$v_T = (R/f)(\partial[T]/\partial x) \ln(750/500) = - (287/10^{-4})(3/10^5)\ln(750/500) = - 35 \text{ ms}^{-1}.$$

$$\mathbf{V}_{g500} = \mathbf{V}_{g750} + \mathbf{V}_T = (20\cos 45^\circ)\mathbf{i} + (-20\sin 45^\circ - 35)\mathbf{j} = (14\mathbf{i} - 49\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}.$$

(b) Advecção térmica média na camada é dada por  $- [\mathbf{V}_g] \cdot \nabla[T] = [u_g]\partial[T]/\partial x = - (14 \times 3/10^5) \text{ }^\circ\text{K s}^{-1} \approx - 1,5 \text{ }^\circ\text{K h}^{-1}$ .

4. Calcule (a) a velocidade angular da Terra, (b) o parâmetro de Coriolis em latitudes de 20°S, 30°S, 45°S, 60°S, (c) massa da atmosfera terrestre por área unitária assumindo que pressão atmosférica a superfície é 1000 hPa, (d) massa total da atmosfera assumindo que a superfície terrestre é regular (sem montanhas), (e) o calor latente da vapor d'água da coluna atmosférica com 40 mm de água precipitável, (f) o aumento médio de temperatura da coluna após a liberação deste calor. (Considere seguintes constantes e parâmetros: Gravidade,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ , Raio da Terra,  $a = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , Constante de gas do ar seco,  $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ , Calor específico do ar a pressão constante,  $c_p = 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ , Calor específico do ar a volume constante,  $c_v = 717 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ , Calor latente de condensação da vapor d'água,  $L_c = 2,5 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ )

Resposta

(a) A Terra completa uma rotação ( $360^\circ = 2\pi$  radianos) em 24 horas. Isto é, a

(b) velocidade angular da Terra,  $\Omega$ , é  $2\pi$  radianos em 24 horas.  $\Omega = 3,1415/(12 \times 60 \times 60)$

$$(c) \text{ rad/s} = 7,27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

(d) 20°S é -20°.

$$f(-20^\circ) = 2\Omega \sin(-20^\circ) = -2 \times 7,27 \times 10^{-5} \sin(-20^\circ) \text{ s}^{-1} = -4,97 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Do mesmo modo os valores de  $f$  nas demais latitudes são:

$$f(-30^\circ) = -7,27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

$$f(-45^\circ) = -1,03 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

$$f(-60^\circ) = -1,26 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

(e) Pressão atmosférica em superfície,  $p_s$ , é igual ao peso da coluna unitária. Isto é,

$M g = 1000 \times 100 Pa \rightarrow M = 10^5 / 9,81 kg = 1,02 \times 10^4 kg$  (10,2 toneladas) por  $m^2$ .

(f) A área da superfície terrestre =  $4\pi a^2 = 510 \times 10^{12} m^2$ .

Portanto massa total da atmosfera =  $510 \times 10^{12} \times 1,02 \times 10^4 kg = 520,2 \times 10^{16} kg$ .

(g) 40 mm de água precipitável (w) é igual 40 litros de água por  $m^2$  que equivale 40 kg  $m^{-2}$  na forma de vapor de água. Condensação desta quantia libera calor =  $L_c w = 2,5 \times 10^6 \times 40 J m^{-2} = 10^7 J m^{-2}$ .

(h) Se o calor do item (e) aquece uniformemente a coluna toda da massa calculada no item (c) o aumento da temperatura é dado por:

$$\Delta T = \text{calor liberado} / (\text{massa} \times \text{calor específico do ar a volume constante})$$

$$= 10^7 / (1,02 \times 10^4 \times 717) K = 1,37 K.$$

5. Um vórtice ciclônico está em equilíbrio ciclostrófico com a velocidade tangencial dada por  $V = V_0(r/r_0)^n$  onde  $V_0$  é a velocidade tangencial a uma distância  $r_0$  do centro da vórtice. (a) Calcule a circulação ao longo da linha de corrente com raio r. (b) Calcule a vorticidade ao raio r (suponha que a pressão é  $p_0$  em  $r$  (raio) =  $r_0$  e que a densidade é constante.)

Resposta:

(a) Os campos de pressão ( $p = p(r)$ ) e de velocidade tangencial ( $V(r)$ ) num vórtice em balanço ciclostrófico tem a seguinte relação:

$$V^2/r = - (1/\rho) (\partial p / \partial r) \text{ onde } r \text{ é a distancia do centro para fora.}$$

Uma vez que a densidade é considerada constante podemos integrar a equação para obter a pressão como função de r.

$$\int (\partial p / \partial r) dr = - \int \rho (V^2/r) dr$$

Substituindo o valor de V dado no enunciado do problema e tomando limites da integração  $r_0$  a r, e notando-se que  $p(r_0) = p_0$ , tem-se

$$p = p_0 + (\rho V_0^2 / 2n) [1 - (r/r_0)^{2n}].$$

A circulação em volta do circuito circular do raio r é dada por

$C = \int_C V(r) dl$ , onde  $dl$  é incremento infinitesimal (positivo no sentido antihorário) da distância ao longo do circuito e  $\int_C$  é um integral fechado em torno deste circuito,  $dl = r d\theta$ , onde  $d\theta$  é o incremento de ângulo.

Colocando o valor da velocidade tangencial dada no enunciado do problema tem-se

$$C = \int_C V_0 (r/r_0)^n r d\theta = 2\pi V_0 (r^{n+2}/r_0^n) / (n+2).$$

(b) A vorticidade,  $\zeta$ , é a circulação por área unitária. Portanto

$$\zeta = 2\pi V_0 (r^{n+1}/r_0^n) / [(\pi r^2)] = (2V_0/r_0)(r/r_0)^{n-1}.$$

6. Que distância um cinturão zonal de ar, inicialmente em repouso com respeito a Terra a uma altura de 100 km em 60°S, deve deslocar latitudinalmente para adquirir um componente de movimento de oeste para leste com uma magnitude de  $10 m s^{-1}$  com respeito a Terra?

Resposta

Designando  $\Delta R$  a variação da distância do cinturão do eixo da Terra e  $\Delta u$  é a variação da velocidade do cinturão com respeito a Terra, tem-se a força centrífuga:

$$\Omega R^2 = \{\Omega + \Delta u/(R+\Delta R)\} \{R + \Delta R\}^2 . \text{ Desprezando os termos da alta ordem tem-se :}$$

$$\Delta u = - 2\Omega \Delta R = - 2\Omega r \Delta\varphi \sin \varphi_0, \text{ onde } \varphi \text{ é latitude e } \varphi_0 \text{ é a latitude inicial.}$$

Substituindo os valores da velocidade angular da Terra (Problema 5) e  $\Delta u = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varphi_0 = - 60^\circ$ , a distância do cinturão do centro da Terra,  $r = 6,47 \times 10^6 \text{ m}$ , tem-se  $\Delta\varphi = 0,0123$  radianos. Isso corresponde um deslocamento latitudinal de aproximadamente  $0,7^\circ$  no sentido do pólo sul.

7. (a) Prove que a vorticidade relativa,  $\zeta$ , integrada sobre uma superfície fechada em volta da Terra (exemplo superfície de 500 hPa) é nula. (b) O que significa esse resultado? (c) E, a divergência,  $D = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ , integrada sobre esta superfície também é nula?

Resposta

(a) Sabe-se que a vorticidade integrada sobre uma área limitada dentro de um fluido é igual a circulação em volta da sua fronteira, a qual é um circuito fechado. A circulação,  $C$ , é dada pelo integral de linha da velocidade tangencial ao circuito. Isto é,

$\int_A \zeta \, dA = AC$ , onde  $A$  é a área (não necessariamente plana),  $\zeta$  é a componente de vorticidade perpendicular a área infinitesimal  $dA$  e  $\int_A$  é o integral de área sobre  $A$ .

$C$  é a circulação dada por  $C = \int_C v_t \, dl$ , onde  $\int_C$  é integral fechado ao longo do circuito  $C$  que fecha a área  $A$ ,  $v_t$  é componente de velocidade do fluido tangencial ao circuito e  $dl$  é um segmento de linha ao longo do circuito, positivo no sentido antihorário. Isto significa que se o comprimento do circuito tender a zero a circulação também tende a zero. Agora, imagine uma superfície fechada na atmosfera em volta da Terra com um pequeno orifício. A vorticidade (componente perpendicular a superfície) integrada sobre a superfície será igual a circulação em volta do perímetro do orifício. Se o orifício for cada vez menor o perímetro fica cada vez menor, e no limite de superfície fechada o orifício se torna um ponto e a circulação em torno do perímetro tornará nula. Ou, vorticidade integrada sobre uma superfície fechada em volta da Terra é nula.

(b) Este resultado significa que se tem uma região de vorticidade ciclônica sobre uma superfície fechada, como por exemplo a superfície de 500 hPa, deve existir uma outra região da vorticidade anticiclônica. Em outras palavras, o número de centros ciclônicos e número de centros anticiclônicos sobre uma superfície global são iguais e em média as intensidades são iguais.

(c) Analogamente, a divergência integrada sobre uma superfície fechada também é nula. A divergência integrada sobre uma área é igual o fluxo para fora da área, a qual é igual o integral do componente de movimento perpendicular ao perímetro da área ao longo do perímetro. Para uma superfície fechada o “perímetro” é nulo e portanto o resultado. Isto

significa que as regiões de divergência e convergência são de igual número e em média da igual intensidade.

8. Para um oceano homogêneo e incompressível de profundidade  $h$ , a equação de vorticidade turbulenta pode ser escrita:

$$(\partial/\partial t)\{\partial^2/\partial x^2 - f_0^2/gH\}h' + \beta(\partial h'/\partial x) = 0,$$

onde  $h = H + h'$  e demais símbolos tem significados habituais. (a) Mostre que as ondas,  $h' = h_0 \exp[i(kx-vt)]$  admitidas como solução desta equação tem a seguinte relação de dispersão:  $v = -\beta k/(k^2+f_0^2/gH)$ . (b) Esta onda é dispersiva? Qual é a sua velocidade de grupo? (c) Para um oceano de profundidade  $H = 1 \text{ km}$  qual é a velocidade de fase desta onda de Rossby de comprimento de onda de  $1000 \text{ km}$ . Assuma que  $f = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $\beta = 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Resposta

(a) Sendo  $h' = h_0 \exp [i(kx-vt)]$ , tem-se

$$\partial h'/\partial x = h_0 ik \exp [i(kx-vt)] = ik h'; \quad d^2 h'/dx^2 = -k^2 h';$$

$$\partial h'/\partial t = -h_0 iv \exp [i(kx-vt)] = -iv h';$$

$$(\partial/\partial t)(\partial^2 h'/dx^2) = iv k^2 h';$$

Substituindo essas relações na equação de vorticidade dada tem-se

$$(k^2 + f_0^2/gH)v + \beta k = 0 \rightarrow v = -\beta k/(k^2+f_0^2/gH)$$

(b) Uma vez que a velocidade de fase desta onda  $c_x \equiv v/k$  é uma função do comprimento da onda a onda é dispersiva. Portanto, a sua velocidade de grupo é diferente da sua velocidade de fase.

$$\text{Velocidade de grupo, } c_g \equiv \partial v/\partial k = \beta(k^2 - f_0^2/gH)/(k^2+f_0^2/gH)$$

(c) tem-se  $\beta = 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $H = 10^3 \text{ m}$ ,  $L_x = 10^6 \text{ m} \rightarrow k = 2\pi/L_x = 6,28 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ .

Substituição destes valores tem-se,  $c_x = -0,25 \text{ ms}^{-1}$ ,  $c_g = ?? \text{ ms}^{-1}$ .

9. A equação de continuidade em duas dimensões ( $x, z$ ) integrada na vertical para um escoamento barotrópico é dada por

$$(\partial/\partial t)h' + \bar{u}(\partial/\partial x)h' + H(\partial/\partial x)u' = 0$$

onde  $\bar{u}$ ,  $H$  são movimento e profundidade do estado básico,  $g$  é a aceleração de gravidade e  $h'$  e  $u'$  são perturbações da superfície livre e da velocidade horizontal. Esta equação juntamente com a equação de movimento permite ondas de gravidade (externas).

A perturbação da altura da superfície livre do fluido para onda de gravidade é dada por

$$h' = \text{Re}[A \exp ik(x-ct)],$$

onde  $A$  é amplitude (complexa),  $k$  é número de onda,  $c$  é a velocidade de fase da onda e demais símbolos tem significados tradicionais.

- (a) Ache a expressão para a perturbação de velocidade do fluido.  
 (b) Esboçe  $h'$  e  $u'$  para a onda que se desloca para leste.

Resposta

- (a) Ao substituir a expressão para  $h'$  na equação de continuidade verticalmente integrada tem-se

$$-ik c h' + ik \bar{u} h' = H(\partial/\partial x)u' \rightarrow (\partial/\partial x)u' = [-ik(c - \bar{u})/H]h'$$

Integrando a equação em  $x$  tal que a constante de integração é nula tem-se

$$u' = [( \bar{u} - c )/H]h'. \text{ Ou, } u' = [(c - \bar{u})/H] \text{ Re}[A \exp ik(x-ct)]$$

- (b) Para onda que se propaga para leste  $(c - \bar{u}) > 0$ . como  $H$  é sempre positiva, a fase da velocidade horizontal das parcelas do fluido coincide com a fase do desvio da altura da superfície livre. O aluno deve esboçar o campo de  $u'$  no plano  $xz$ .

10. Dada a expressão para o campo de geopotencial:

$\Phi(x, y, p, t) = \Phi_0(p) + f_0[- Uy + k^{-1}V \cos(\pi p/p_0) \sin k(x-ct)]$  onde  $U$ ,  $V$  e  $c$  são velocidades constantes, use a equação de vorticidade quasigeostrófica para obter uma estimativa de  $\omega$ . Assuma que  $df/dy = \beta$  é constante e que  $\omega$  é nula em  $p = p_0$ .

Resposta

A expressão de  $\Phi$  dada no anúncio do problema fornece seguintes expressões para vento geostrófico, vorticidade geostrófica e sua advecção e tendência:

$$\begin{aligned} u_g &= -f_0^{-1} \partial \Phi / \partial y = U; \quad v_g = f_0^{-1} \partial \Phi / \partial x = V \cos(\pi p/p_0) \cos k(x-ct); \\ \zeta_g &= -f_0^{-1} \nabla^2 \Phi = \nabla^2 [-Uy + k^{-1}V \cos(\pi p/p_0) \sin k(x-ct)] = -Vk \cos(\pi p/p_0) \sin k(x-ct); \\ \partial \zeta_g / \partial t &= -V k^2 c \cos(\pi p/p_0) \cos k(x-ct); \\ \partial \zeta_g / \partial x &= -V k^2 \cos(\pi p/p_0) \cos k(x-ct); \quad \partial \zeta_g / \partial y = 0; \\ \mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g &= u_g \partial \zeta_g / \partial x = UVk^2 \cos(\pi p/p_0) \cos k(x-ct); \end{aligned}$$

Substituindo as expressões na equação de vorticidade quasigeostrófica:

$$\begin{aligned} \partial \zeta_g / \partial t &= -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g - v_g \beta + f_0 \partial \omega / \partial p \rightarrow \\ \partial \omega / \partial p &= [\partial \zeta_g / \partial t + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g + v_g \beta] / f_0. \end{aligned}$$

tem-se

$$\partial \omega / \partial p = V[\beta - k^2(c-U)] \cos k(x-ct) \cos(\pi p/p_0)$$

Integrando a equação de  $p = p_0$  a  $p = p$  e notando que  $\omega(p_0) = 0$  tem-se

$$\omega(x, p, t) = -V[\beta - k^2(c-U)] \cos k(x-ct) \text{ sen}(\pi p/p_0)$$

## Questões frequentemente feitas nos exames orais

1. *Por que os centros de pressão inclinam-se com a altura?*

Porque a pressão decai com a altura mais rapidamente em uma coluna atmosférica fria e com uma menor taxa em uma coluna quente (equação hidrostática ou equação hipsométrica).

2. *Por que os centros de pressão não se inclinam com a altura numa atmosfera barotrópica?*

Uma consequência da hidrostática é que os centros de baixa pressão inclinam para o lado das temperaturas relativamente frias e os centros de alta pressão para o lado das temperaturas quentes. Em uma atmosfera barotrópica isóbaras e isotermas são coincidentes (por exemplo, baixa fria ou alta quente). Nestas condições um centro de baixa pressão continua no local de temperatura relativamente baixa, ou seja, não se inclina na vertical. Do mesmo modo, o centro de alta pressão também continua no mesmo local em todos os níveis. Em caso de autobarotropia, ou seja, temperatura constante (horizontalmente) em todo o domínio, também os centros permanecem no mesmo lugar geográfico.

3. *Em que situação um centro de baixa pressão se aprofunda (se intensifica) com a altura?*

Quando o núcleo do centro de baixa pressão está relativamente frio, se comparado com a vizinhança.

4. *Em que situação um centro de baixa pressão se enfraquece com a altura, e é substituído por um centro de alta pressão?*

O centro de baixa pressão enfraquece com a altura quando o seu centro apresenta temperaturas mais quentes que na sua vizinhança. Isto ocorre porque em uma coluna atmosférica quente a pressão decai com a altura com menor taxa que na sua vizinhança.

5. *Descreva a estrutura vertical dos centros de alta pressão associados com friagens. Explique a estrutura.*

São rasos, confinados na baixa troposfera. Na alta troposfera encontra-se um cavado no mesmo lugar geográfico da alta fria. Isto se deve a alta taxa de decaimento da pressão com a altura numa coluna atmosférica fria.

6. *Para gradientes de pressão iguais, o vento geostrófico é mais intenso que o vento gradiente em volta de um centro de alta pressão. Por que?*

Em escoamentos estacionários (sem mudanças com o tempo) em volta da alta pressão a circulação é normalmente anticiclônica. Isto é, antihorária no Hemisfério Sul. Nestas

condições a força de Coriolis contrabalança o somatório de duas forças, força de gradiente de pressão e a força centrífuga. Uma vez que a força de Coriolis é proporcional à velocidade da parcela, a velocidade deve ser maior que o vento geostrófico necessário para contrabalançar apenas uma única força.

7. *Os campos de divergência e de vorticidade estão associados com os ventos ageostrófico e geostrófico, respectivamente. Explique.*

Considerando o parâmetro de Coriolis constante o vento geostrófico é não divergente; portanto, a divergência do escoamento é devido ao vento ageostrófico. O rotacional do vento ageostrófico é desprezível em comparação com o rotacional do vento geostrófico para movimentos sinóticos.

8. *Quais são as vantagens de descrever o escoamento atmosférico da escala sinótica em coordenadas isobáricas?*

Primeiro, a equação da continuidade assume uma forma simples, a qual não faz referência a densidade, uma variável não medida. Os termos de gradiente de pressão nas equações de movimento também não fazem referência à densidade. Segundo, as medidas meteorológicas a partir de radiossondagens são feitas nas superfícies isobáricas.

9. *Qual é a diferença entre a circulação e a vorticidade?*

Vorticidade é uma medida pontual do rotacional de escoamento e a circulação é uma medida da mesma em volta de uma área finita.

10. *O que é isolinha e como fica gradiente de um campo escalar em relação as suas isolinhas?*

Isolinha é uma linha contínua traçada conectando os pontos com um mesmo valor do campo escalar definido num domínio de espaço em duas dimensões ou espaço-tempo. Exemplos na meteorologia são isóbara que liga os pontos com um mesmo valor de pressão barométrica e isoterma que liga pontos com um mesmo valor de temperatura. Neste caso, o gradiente do campo escalar num ponto (no domínio em que o campo está definido) é um vetor bidimensional que está direcionado perpendicular às isolinhas do campo no sentido de baixos valores para altos valores. A magnitude do gradiente é exatamente a taxa de variação do campo neste ponto na direção perpendicular às isolinhas. (Esta ideia pode ser facilmente estendida para campos tridimensionais.)

11. *Explique fisicamente o significado de Gradiente, Advecção e Laplaciano?*

12. *O que é circulação ciclônica, em qualquer Hemisfério?*

Se a projeção da circulação no plano equatorial está no mesmo sentido da rotação da Terra, a circulação é dita ciclônica. Se o sinal da vorticidade relativa é igual ao sinal do parâmetro de Coriolis, a circulação é chamada ciclônica.

13. *Qual é a ordem de magnitude do vento na baixa troposfera? Qual é a sua ordem no nível do jato?*



O vento na baixa troposfera nos sistemas de escala sinótica é da ordem de  $10 \text{ m s}^{-1}$ . No nível da corrente de jato a ordem de magnitude aumenta para  $100 \text{ ms}^{-1}$ , na alta troposfera.

*14. Qual é a ordem de magnitude da divergência e da vorticidade na baixa troposfera em latitudes médias? E nas latitudes tropicais? Qual é a consequência destes valores?*

A vorticidade nas latitudes médias, nos sistemas sinóticos, é da ordem de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  enquanto a divergência é da ordem de  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Nos trópicos, a vorticidade é menor, ou seja, é da ordem de  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Por esta razão, a aproximação quasigeostrófica não é válida nos trópicos.

*15. Em geral, qual é o perfil vertical da velocidade vertical nas proximidades dos centros de pressão? Como este perfil está associado com os campos de convergência e divergência?*

Nos centros de baixa pressão (dos sistemas sinóticos) das latitudes médias observa-se movimento vertical ascendente mais intenso na média troposfera. Próximo à superfície e na estratosfera os movimentos verticais são fracos ou aproximadamente nulos. Isso se deve a convergência (divergência) na baixa (alta) troposfera. Nos centros de alta pressão o movimento vertical é descendente na média troposfera por razão da divergência (convergência) na baixa (alta) troposfera.

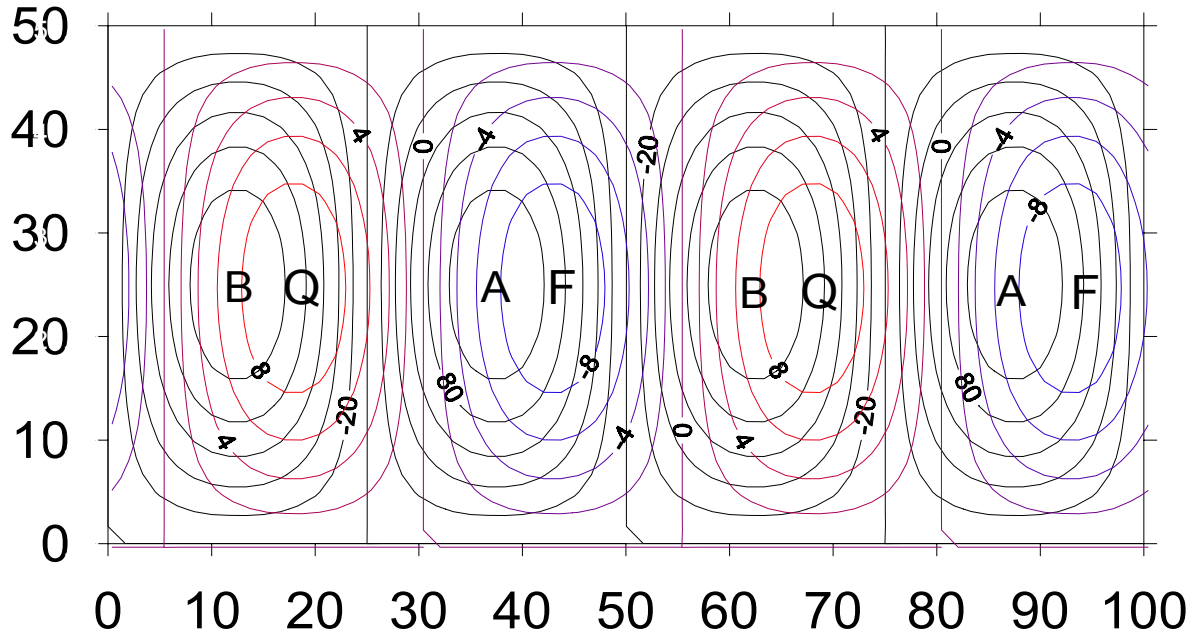
*16. O que é “entrada do jato” e “saída do jato”?*

Em uma região estreita de ventos fortes de oeste, a entrada de jato é a subregião a oeste do seu núcleo e a saída é a subregião a leste do seu núcleo. As linhas de corrente na entrada do jato são confluentes, enquanto na saída do jato são difluentes.

*17. Em que posição, relativo a um corrente de jato, espera-se desenvolvimento ciclônico na superfície e por quê?*

No lado equatorial da entrada do jato e ao lado polar da saída do jato espera-se formação ou aprofundamento do centro de baixa pressão, porque estas regiões apresentam divergência em altos níveis inferidos pelos ventos ageostróficos devido à aceleração corrente acima e desaceleração corrente abaixo do núcleo do jato.

*18. Esboçe uma onda de geopotencial e uma onda térmica em um nível da baixa troposfera em três situações: baroclínica, barotrópica e autobarotrópica.*



A figura mostra o esboço de uma onda baroclínica idealizada. As isolinhas em preto representam anomalia de geopotencial (m) e as linhas coloridas representam o campo térmico (C), em um plano horizontal. Nos eixos x e y as distâncias para leste e para norte (no HS) são dadas em centenas de km. B e A são os centros de baixa e alta pressão (geopotencial), respectivamente. Q e F são os centros de massas de ar quente e frio, respectivamente. O comprimento de onda na direção leste-oeste é 5000 km. Nota-se que o campo térmico está defasado em relação ao campo de pressão por aproximadamente 2000 km para oeste. Isto é, o núcleo de ar frio está a uma distância de 2000 km para oeste do centro de baixa pressão. (Se todo o comprimento de onda corresponde a  $360^\circ$ , a defasagem equivale a  $145^\circ$ .) Nestas condições os centros de pressão tendem-se a inclinar para oeste com a altura.

No caso de uma onda barotrópica, a defasagem é nula ou de  $180^\circ$ . Isto é, as isóbaras e as isotermas são coincidentes. Em outras palavras, temperatura torna-se função somente da pressão. Neste caso, os centros de pressão não inclinam-se com a altura. (Todavia, eles podem-se intensificar ou desintensificar com a altura.)

No caso de temperatura horizontalmente constante em todo o domínio da onda, isto é, quando não existe onda térmica, a situação é trivialmente barotrópica. Esta situação é chamada autobarotrópica. Neste caso, os centros de pressão tendem permanecer na mesma posição com a altura, sem sofrer alterações nas suas intensidades.

19. *Em que sentido uma onda de Rossby desloca-se com relação ao escoamento básico?*

Para oeste.

20. *Que termo da equação de vorticidade é responsável pelo movimento da onda de Rossby para leste, que termo é responsável pelo movimento para oeste? Que termo domina as ondas curtas e que termo domina as ondas longas?*

A advecção de vorticidade relativa é responsável pelo movimento para leste e o termo beta (ou advecção da vorticidade planetária) é responsável pelo movimento para oeste. As ondas longas são afetadas pelo termo Beta e as ondas curtas pela advecção da vorticidade relativa.

*21. Os movimentos associados à divergência e convergência são essencialmente movimentos que atravessam as isóbaras. Explique.*

Os movimentos paralelos às isóbaras são essencialmente geostróficos e a sua divergência é desprezível ou nula. Portanto somente movimentos que atravessam as isóbaras são ageostróficos e divergentes.

*22. O que é advecção térmica?*

É a taxa de variação de temperatura em um ponto geográfico pelos movimentos da atmosfera na presença de contrastes térmicos.

*23. Os movimentos que atravessam as isotermas são responsáveis pelas advecções térmicas. Explique.*

Para haver advecção térmica precisa haver variações térmicas e um componente não nulo do movimento de parcelas do ar ao longo do vetor de gradiente ou perpendicular às isotermas.

*24. Qual é o mecanismo principal relacionado com a forte queda de temperatura associada à friagem?*

Advecção térmica. (A perda radiativa de calor durante a noite também causa queda de temperatura, porém seu efeito é menor que a advecção nas friagens que ocorrem no Sul e Sudeste do Brasil.)

*25. Em uma situação estacionária o atrito é responsável pelos movimentos que atravessam as isóbaras para regiões de baixa pressão. Explique.*

Na presença de atrito, em situações estacionárias, o balanço de forças sobre as parcelas do ar se dá entre a força de Coriolis, a força de pressão, o atrito e a força centrífuga. A força de Coriolis é reduzida na presença do atrito porque o atrito reduz a velocidade e a força de Coriolis é proporcional a velocidade. A força de gradiente de pressão, portanto, acelera as parcelas para o lado de baixa pressão, ou seja, perpendicular às isóbaras. Este efeito é mais sentido em situações em que a força da pressão atua no sentido oposto ao da força centrífuga, ou seja, em volta dos centros de baixa pressão. Por esta razão, observa-se convergência e, conseqüente, movimento ascendente na média troposfera na região de baixa pressão.

*26. O que é bombeamento de Ekman (“Ekman pumping”)?*

Devido a presença do atrito próximo à superfície, o fluido (a atmosfera) é transportado para o lado de baixa pressão e a divergência do transporte integrado na vertical em toda a

camada de Ekman é proporcional à vorticidade na atmosfera livre, isto é, no topo da camada de Ekman (aproximadamente 2 km). O movimento vertical é proporcional a vorticidade relativa geostrófica no topo da camada de Ekman. O transporte de massa para cima devido a esta velocidade vertical é chamada de “Ekman pumping”.

27. O que é “spindown” ou decaimento da circulação?

Os movimentos secundários devido a presença de atrito próximo à superfície tendem desacelerar os movimentos primários do escoamento básico inicial. Esta desaceleração destrói a circulação primária. O tempo de redução da intensidade da circulação primária para os valores “e” vezes menores que os valores iniciais é o tempo de “spindown”.

28. O que é a ideia de “coeficiente de arrasto” para parametrizar os fluxos turbulentos de quantidade de movimento e calor? Em que condições esta parametrização não se aplica?

Em condições favoráveis, principalmente sobre regiões continentais nos dias bem aquecidos, uma camada atmosférica rasa próximo a superfície se mistura bem (verticalmente) de tal maneira que a temperatura potencial e a velocidade de vento não variam com altura. Observações indicam que nesta camada os fluxos turbulentos (verticais) podem ser representadas da seguinte maneira:

$$u' w' = - C_d \left| \bar{\mathbf{V}} \right| \bar{u}$$

onde  $u$  e  $w$  são componentes horizontal e vertical do movimento das parcelas do ar  $\mathbf{V}$ . O constante de proporcionalidade  $C_d$  é chamado “coeficiente de arrasto”. A barra acima dos variáveis indica a média do Reynolds.

Esta teoria não se aplica em condições estáveis, isto é, quando o parâmetro de estabilidade estática é positiva e grande. Nestas condições não ocorre mistura da camada, e a velocidade e a temperatura potencial apresentam grande variação com a altura.

29. O que é teoria K?

Em condições normais de estabilidade, na camada limite planetária, o vento e a temperatura potencial variam muito com a altura. Nestas situações os fluxos turbulentos são expressos, usando a analogia da difusão molecular, da seguinte maneira:

$$u' w' = - K_m (\partial u / \partial z), \text{ etc.}$$

Na qual  $K_m$  é coeficiente de viscosidade turbulenta,  $u$  e  $w$  são componentes horizontal e vertical de vento e a barra representa a média de Reynolds. Esta suposição de que os fluxos turbulentos são proporcionais ao gradiente da variável, chamada teoria K, permite o fechamento das equações que regem o escoamento na camada limite planetária.

30. Por que o escoamento ciclônico apresenta convergência e o escoamento anticiclônico apresenta divergência?

Devido ao atrito, principalmente próximo à superfície ou camada limite planetária, o vento deixa de ser geostrófico e adquire um componente para o lado de baixa pressão. Isto significa que, em volta de um centro de baixa pressão ou equivalentemente num ciclone, o vento converge para o centro. Do mesmo modo, em volta de um centro de alta pressão ou um anticiclone, o escoamento apresenta divergência.

*31. Por que regiões ciclônicas apresentam mau tempo e anticiclônicas bom tempo?*

As regiões ciclônicas estão associadas com convergência em baixos níveis e divergência em altos níveis, assim, os movimentos verticais na média troposfera são ascendentes. As razões para isso são os efeitos dinâmicos (advecção diferencial da vorticidade e Laplaciano de advecção térmica) e os efeitos de atrito na baixa troposfera. Estes movimentos são necessários para a formação de nuvens e outros fenômenos de tempo.

*32. Quais são as diferenças entre os Hemisférios da Terra?*

Geograficamente falando, primeiro o parâmetro de Coriolis,  $f$ , é positivo (por definição) no Hemisfério Norte (HN) e negativo no Hemisfério Sul (HS). O HS apresenta proporcionalmente maior homogeneidade da superfície. A calota polar no HS é um continente, enquanto a do HN é um mar.

*33. Qual é a diferença entre jato subtropical e jato polar?*

O jato subtropical, além da latitude de ocorrência ser mais próximo ao equador, se encontra numa altitude mais elevada. O jato subtropical não é circumpolar. Ele ocorre nas regiões corrente abaixo das regiões de células de Hadley intensas.

*34. Qual é a ligação entre a célula de Hadley e o jato subtropical? Qual é o papel da conservação de momentum angular nesta ligação?*

Na região equatorial da célula de Hadley o ar se eleva e na alta troposfera desloca-se na direção do polo. Este movimento meridional faz com que a distância do eixo da Terra diminua, e pela conservação do movimento angular o ar adquire um componente do movimento de oeste para leste. Ou seja, os ventos nos subtrópicos, corrente abaixo das células de Hadley intensas, tornam-se essencialmente zonais (e descendentes). Nestas regiões os ventos atingem máximos que são chamados de jato subtropical.

*35. Por que a temperatura cai com a altura na troposfera?*

Essencialmente o ar troposférico é aquecido por baixo próximo à superfície e é esfriado por cima. [Se a temperatura aumenta ou fica uniforme com a altura, a troposfera se torna muito estável, não permitindo circulações meridionais (no plano  $y-z$ ) e o crescimento de perturbações baroclínicas necessárias para o transporte de calor para altas latitudes.]

*36. Por que não se usa a equação de continuidade para estimar a velocidade vertical?*

Porque os dois termos da divergência horizontal do escoamento normalmente contrapõem um ao outro e no somatório deixam um resíduo de uma ordem de magnitude

menor que cada termo. Isso implica em grandes incertezas no cálculo da divergência e, portanto, no cálculo da velocidade vertical.

*37. Quais são os métodos de avaliação da velocidade vertical na escala sinótica?*

Através da equação omega convencional ou através da equação omega expressa em termos do vetor-Q ou através da equação termodinâmica ou através do uso da equação de vorticidade. Normalmente, o uso da equação de continuidade não fornece resultados satisfatórios (veja questão anterior).

*38. O que é aproximação de água rasa?*

Quando a profundidade de um fluido incompressível é muito menor que a extensão horizontal dos fenômenos ou ondas estudadas as equações tornam-se mais simples de tratar. Essencialmente as equações de continuidade e do movimento horizontal juntamente com a equação hidrostática geram uma equação relativamente simples de tratar.

*39. O que é um sistema sinótico (de latitudes médias)?*

Um sistema sinótico é uma perturbação do escoamento com escala horizontal de milhares de km, e é constituído, em geral, por altas e baixas nos campos de pressão ou geopotencial, vento, temperatura e umidade. Os sistemas sinóticos baroclínicos apresentam uma estrutura tridimensional. Dependendo das condições do escoamento, os sistemas podem se intensificar ou desintensificar (dissipar) com o tempo. Normalmente os sistemas sinóticos apresentam deslocamento na horizontal com uma velocidade da ordem de  $10 \text{ ms}^{-1}$  para leste. Um sistema sinótico de latitudes médias em desenvolvimento é composto de um centro de baixa pressão, uma frente fria, uma frente quente, um centro de alta pressão na retaguarda da frente fria e correntes de jato na média e na alta troposfera. Diferentes partes do sistema sinótico apresentam diferentes fenômenos de tempo (relâmpago, chuva, nebulosidade, nevoeiro, céu claro, etc.). Por estas razões, o tempo em um ponto fixo na Terra sofre variações à medida que o sistema atuante evolui e/ou propaga.

*40. O que é quasigeostrofia? Em que situações a teoria quasigeostrófica funciona?*

Para os sistemas extratropicais os movimentos horizontais são aproximadamente geostróficos e as variações temporais de campos ocorrem devido aos pequenos desvios da geostrofia. Os movimentos tridimensionais atmosféricos desses sistemas, com as restrições da equação hidrostática e aproximadamente geostrófica, podem ser expressas pela distribuição do campo de geopotencial sobre as superfícies isobáricas. O conjunto de equações simplifica-se para as equações de vorticidade geostrófica e da termodinâmica, nas quais as advecções são carregadas pelo vento geostrófico. A teoria quasigeostrófica funciona bem nas latitudes médias para estudar os sistemas das escalas sinótica e maiores.

41. *O que é equação de tendência?*

As equações quasegeostróficas de vorticidade e termodinâmica permitem a eliminação da variável omega, resultando em uma equação de tendência do geopotencial. Esta equação permite (dentro das limitações da teoria quasigeostrófica) a obtenção da variação temporal do geopotencial dada o campo do geopotencial em um instante. As forçantes do Laplaciano da tendência do geopotencial são a advecção da vorticidade absoluta geostrófica e a variação vertical da advecção térmica. Esta equação pode ser escrita ainda na forma de uma equação de conservação de vorticidade quasigeostrófica potencial. É uma equação prognóstica e pode ser usada para previsão de tempo.

42. *Quais são as limitações da equação Omega quasigeostrófica convencional e como foram sanadas por Hoskins?*

As duas forçantes dinâmicas do Laplaciano da velocidade vertical (advecção de vorticidade diferencial e Laplaciano da advecção térmica) possuem termos de cancelamento e as forçantes não são invariantes Galelianas. Isto é, se adicionarmos um escoamento uniforme (uma translação pura) aos campos de ventos os termos mudam de valor. Com isso os erros na estimativa da velocidade vertical dependem criticamente dos erros de observação. Na formulação do vetor Q da equação este problema foi sanado, uma vez que as duas forçantes foram juntadas em uma única forçante, a divergência do vetor-Q.

43. *Quais são os tipos básicos de ondas atmosféricas permitidos pelas equações primitivas?*

Essencialmente, ondas acústicas, de gravidade e de Rossby.

44. *O que é uma onda de Rossby?*

Uma onda de Rossby é uma alternância de vorticidade absoluta ciclônica e anticiclônica. Possui um comprimento de onda da ordem de alguns milhares de km na horizontal e normalmente propaga-se de oeste para leste. Os sistemas de tempo nas latitudes médias são eminentemente ondas de Rossby. A propagação da onda de Rossby, em relação ao escoamento básico, é de leste para oeste, todavia, o escoamento básico nas latitudes médias é de oeste para leste e é bastante intenso para levar as ondas para leste.

45. *O que é raio de deformação de Rossby?*

É a distância percorrida pela onda de gravidade na escala de tempo de atuação da força de Coriolis. É uma escala de distância horizontal sobre a qual o campo do geopotencial se ajusta para um equilíbrio geostrófico.

46. *O que é conservação de uma propriedade do escoamento atmosférico?*

Uma propriedade das parcelas do fluido é dita conservada quando não ocorre mudança durante o percurso livre da parcela. Ou seja, a parcela carrega com ela a mesma quantidade da propriedade em questão. Um exemplo disto é a temperatura potencial

num escoamento adiabático. Matematicamente,  $d\theta/dt = 0$ , onde  $d/dt$  é uma derivada substancial e  $\theta$  é a temperatura potencial.

47. *Cite duas propriedades do escoamento atmosférico que se conservam aproximadamente? Em que condições elas se conservam?*

Temperatura potencial é conservada em processos adiabáticos. A vorticidade potencial de Ertel de um fluido invíscido (ou sem atrito ou viscosidade) é conservado nos escoamentos que conservam a temperatura potencial. O momentum angular é conservada em um escoamento sem atrito.

48. *Cite o mecanismo principal que tende a diminuir a pressão atmosférica em um ponto sobre a superfície terrestre?*

Se o escoamento apresenta divergência do fluido, integrada em toda a coluna atmosférica sobre um ponto, a pressão na superfície nesse ponto tende a diminuir. Isso se deve a diminuição do peso (massa vezes gravidade) da coluna atmosférica.

49. *O que são ondas transversais e ondas longitudinais?*

Ondas em que o movimento das parcelas do ar (ou do fluido ou do meio ou da propriedades do meio que se alternam) e a propagação de onda são na mesma direção são chamadas ondas longitudinais. Se o movimento das parcelas do ar estão perpendiculares à propagação da onda, ela é considerada transversal. Exemplos clássicos: Ondas de som são longitudinais e ondas de luz (ondas eletromagnéticas) são transversais. Na atmosfera, ondas de Rossby são transversais e ondas acústicas são longitudinais.

50. *O que são velocidades de fase e de grupo?*

Em uma perturbação do meio (ou fluido) composta de um único harmônico a velocidade com que um observador precisa viajar para sempre estar na mesma fase da onda (crista ou cavado ou ponto de inflexão ou qualquer outra fase) é chamada velocidade de fase. Quando a perturbação é composta de mais de um harmônico, e cada harmônico propaga-se com uma velocidade diferente, os máximos e mínimos do campo em questão no somatório dos dois ou mais harmônicos propaga-se com uma velocidade diferente. Esta velocidade é chamada velocidade de grupo. Em ondas não dispersivas, i. é., quando a velocidade de fase independe do comprimento de onda ou harmônico, as velocidades de grupo e fase são iguais.

51. *Que tipos de ondas são as acústicas, de gravidade e de Rossby e por quê?*

As ondas acústicas são longitudinais. As parcelas do ar vibram na mesma direção da propagação da onda acústica (ou propagação de contração e rarefação; ou propagação de relativa baixa densidade e alta densidade). As ondas de gravidade são transversais no qual a altura da superfície livre se movimenta na direção da gravidade e a onda propaga-se perpendicular a gravidade. Ondas de Rossby são transversais, na qual as parcelas do



ar, na ausência do escoamento básico, se movimentam na direção norte-sul e a onda se propaga de oeste para leste.

As ondas de som e de gravidade (externa) são ondas não dispersivas, na qual a velocidade de propagação independe do comprimento da onda. As ondas de Rossby são dispersivas, as ondas longas propagam-se para oeste rapidamente e as ondas curtas lentamente.

52. *O que é onda dispersiva? Que ondas atmosféricas são dispersivas?*

As ondas cujas velocidades de propagação dependem do comprimento de onda são dispersivas. As ondas de Rossby são dispersivas. As ondas de Rossby longas propagam-se para oeste rapidamente enquanto as ondas curtas propagam-se lentamente. Quando a perturbação é composta de mais de um harmônico, e cada harmônico propaga com uma velocidade diferente, os máximos e mínimos do campo em questão (altura geopotencial ou vorticidade) no somatório dos dois harmônicos propagam-se com uma velocidade diferente. No caso das ondas de Rossby a velocidade de grupo (relativo ao escoamento básico) é para leste.

53. *Em que região uma crista e um cavado se cruzam?*

Somente nas regiões de “colos”.

54. *O que é campo de deformação ou escoamento com deformação?*

É uma característica fundamental dos escoamentos de fluido (em duas dimensões) que deforma um circuito contínuo formado por parcelas do fluido adjacentes, alongando-o numa direção e comprimindo-o numa outra, sem alteração na área do circuito plano. Esta característica é, frequentemente, responsável pela formação de zonas frontais na presença de gradiente térmico.

55. *O que acontece com um elemento do fluido sobre a influência do campo de convergência?*

O seu volume tende a diminuir.

56. *O que acontece com um elemento de fluido sob a ação do campo de vorticidade?*

O elemento sofre rotação em torno do eixo paralelo ao vetor de vorticidade.

57. *Esboçe uma situação em que o escoamento é confluyente sem que haja convergência.*

58. *Esboçe um escoamento curvilíneo sem rotação.*

59. *Esboçe perfis verticais de temperatura que representem situações estaticamente estável e instável.*

*60. Esboçe perfis verticais de temperatura potencial que representem situações estaticamente estável e instável.*